Математика не для ЕГЭ

Е. К. Белый

Симметрические уравнения

Учебное пособие для учащихся средних школ

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2021

УДК 512.1
ББК 22.14
Б439

Рецензенты:

С. С. Платонов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ПетрГУ;
Н. П. Егорова, учитель математики СОШ № 20 г. Петрозаводска

Белый, Евгений Константинович.
Б439 Симметрические уравнения : учебное пособие для учащихся средних школ / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2021. – 94, [2] с. – (Математика не для ЕГЭ).
ISBN 978-5-8021-3810-6

Учебное пособие позволит освоить эффективные методы решения систем не только симметрических алгебраических уравнений, но и целого класса других уравнений, сводящихся к симметрическим. Большая часть материала доступна ученику девятого класса.

ISBN 978-5-8021-3810-6

УДК 512.1
ББК 22.14

Содержание

Симметрия является той идеей, посредством которой
человек на протяжении веков пытался постичь
и создать порядок, красоту и совершенство.
Герман Вейль

Предисловие

$\boxed{\Rightarrow 7}$ *Дорогой читатель! В этой книге речь пойдет о симметрических уравнениях. А раз так, попробуем сначала ответить на вопрос «что такое симметрия?». Термин «симметрия» (греч.* $\sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ *– соразмерность) означает инвариантность (неизменность) относительно каких-либо преобразований. Такие явления мы постоянно встречаем в живой и неживой природе, искусстве. Любому закону сохранения соответствует своя симметрия физических систем. Согласно третьему закону Ньютона, симметричны взаимодействия тел. Так, Земля притягивает нас с той же силой, с какой мы притягиваем Землю. С древних времен человека завораживала волшебная структура кристаллов – от драгоценных камней до простой снежинки. Нам доставляет удовольствие созерцать группу симметрий в соцветии. Зеркально симметричны левая и правая части человеческого тела. Неудивительно, что это находит отражение в геометрических,* *алгебраических и других математических моделях, описывающих явления окружающей нас действительности. Таким образом, уравнения, которые мы собираемся рассмотреть, вовсе не «плод измышлений праздного ума».*

Надеемся, пособие поможет учащемуся овладеть навыками эффективного решения не только симметрических, но и целого класса других систем алгебраических уравнений. Обычно школьник решает их методом подстановки. Это наиболее универсальный метод, но зачастую громоздкий и требующий большого умственного напряжения. Выполнение самого сложного задания связано с применением ряда относительно простых приемов. И если каждый из них будет требовать значительных затрат времени и сил, мы просто не дойдем до результата. Нам нужны простые, короткие и красивые решения.

Учебное пособие снабжено подборкой задач, которые могут пригодиться учителю при подготовке домашних и контрольных заданий. Большая часть материала доступна ученику девятого класса, но встречаются задачи, рассчитанные на старшеклассника. Такие примеры обычно расположены в конце текущего раздела книги, и их можно пропустить без ущерба для понимания материала следующего параграфа.

В процессе работы над учебным пособием мы обращались к следующим учебникам и задачникам: [19, с. 71–76], [2, с. 23–31], [5, с. 77–79], [6, с. 249–251], [8, с. 164–171], [3, с. 184–187], [10, с. 70–77], [11, 249–253], [12, с. 142–145], [15, с. 70–74], [4, с. 112–116], [16, с. 132–135], [18, с. 36–42], [14, с. 106–112], [1, с. 195–203], [20, с. 40–48]. Читателям, желающим глубже познакомиться с теорией, рекомендуем работы [13, с. 321–334], [7] и [9].

Биографические справки в конце книги посвящены авторам учебников и задачников по алгебре из приведенного выше списка. К сожалению, мы располагаем неполной информацией. Будем признательны каждому, кто сообщит недостающие сведения по одному из адресов: ***belyi@petrsu.ru*** *или* ***kurs_belyi1@mail.ru****.*

Выражаем благодарность всем, кто высказал замечания и предложения по ранее вышедшим в печать книгам данной серии.

Евгений Белый

Январь 2021

Теория, примеры и задачи

§ 1. Системы двух уравнений

1.1. Теория и примеры

$\boxed{4 \Leftrightarrow 35}$ Вспомним теорему Виета. Еще древние греки применяли ее для нахождения корней квадратного трехчлена. Но греки находили корни геометрически, с циркулем и линейкой. Нас же сейчас интересуют алгебраические методы. Пусть квадратный трехчлен представлен в виде

$$x^2 + px + q \tag{1}$$

и имеет вещественные корни x_1 и x_2. Тогда его можно разложить в произведение двух линейных членов:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

$$\text{Таким образом, } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1 (теорема Виета). Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена (1), то их сумма равна коэффициенту при x с противоположным знаком, а произведение – свободному члену (2).

Теорема 2 (обратная теорема Виета). Если переменные x_1 и x_2 удовлетворяют условиям (2), то они являются корнями квадратного трехчлена (1).

Прямая теорема иногда помогает нам угадать корни квадратного трехчлена. Например, только взглянув на выражение $x^2 - 5x + 6$, мы можем сказать, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Аналогично мы видим корни трехчлена $x^2 - 5x - 6$. Это $x_1 = -1$ и $x_2 = 6$. Обратная теорема позволяет свести процесс решения системы вида

$$\begin{cases} x + y = u, \\ x \cdot y = v \end{cases} \quad \text{к нахождению корней одного уравнения.}$$

Дадим системе геометрическую интерпретацию. График первого уравнения – прямая, второго – гипербола. Возможны три случая: графики имеют две точки пересечения, одну или не пересекаются. На рис. 1 приведен пример для $v = 1$. Система уравнений имеет два решения, одно решение или не имеет решений, когда u принимает значения 3, 2 и 1 соответственно. Координаты $(x; y)$

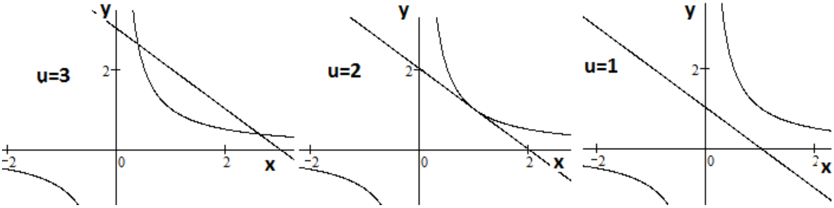

Рис. 1. Графики уравнений: два решения ($u = 3$); одно решение ($u = 2$); нет решений ($u = 1$)

точек пересечения графиков будут корнями квадратного трехчлена $t^2 - u \cdot t + v$.

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решение. Мы могли бы сразу угадать ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Но тогда нас попросят обосновать отсутствие других решений. Легко! Обратная теорема Виета утверждает, что значения x и y, удовлетворяющие условию задачи, должны быть корнями квадратного трехчлена $t^2 - 5t + 6$, а он имеет только два корня: $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. В следующем примере угадать решения не удастся.

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -1. \end{cases}$$

Решение. Найдем корни трехчлена $t^2 - 3t - 1$. Дискриминант $D = 9 + 4 = 13$. Значит,

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \quad t_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Теперь можно записать ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3-\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Поскольку решениями системы уравнений с двумя неизвестными являются пары значений x и y, которые интерпретируются как координаты точек на плоскости, в дальнейшем мы будем записывать ответ в виде $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Пример 3.

$$\begin{cases} x + y = 3\sqrt{2}, \\ xy = \sqrt{6} + 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 3\sqrt{2}t + \sqrt{6} + 1$. $D = 18 - 4\sqrt{6} - 4 = 14 - 4\sqrt{6}$.

Никто не осудил бы нас, если бы мы записали:

$$t_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{14 - 4\sqrt{6}}}{2}$$

и на том остановились. Однако попробуем представить $14 - 4\sqrt{6}$ как полный квадрат: $14 - 4\sqrt{6} = (a\sqrt{2} - b\sqrt{3})^2$. Преобразуем правую часть равенства

$$14 - 4\sqrt{6} = 2a^2 + 3b^2 - 2ab\sqrt{6}.$$

Подберем такие a и b, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} 2ab = 4, \\ 2a^2 + 3b^2 = 14. \end{cases}$$

Подходит $a = 1$ и $b = 2$. Тогда $D = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$. $\sqrt{D} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Отсюда $t_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $t_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Ответ: $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}; \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}; 2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.
Вывод: если получили $t = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14-4\sqrt{6}}}{2}$, а в задачнике дан ответ $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, это еще не значит, что вы ошиблись. Просто $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14-4\sqrt{6}}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Пример 4 (первая Московская математическая олимпиада, 1936). Сколько действительных решений имеет система

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1? \end{cases}$$

Решение. При каждом фиксированном z мы имеем симметричную относительно x и y систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1 + z^2. \end{cases} \quad \Rightarrow \; t^2 - 2t + 1 + z^2. \;\; D/4 = -z^2.$$

$D/4 \geq 0$ только при $z = 0$. Тогда квадратный трехчлен $t^2 - 2t + 1$ имеет два совпадающих корня: $t_1 = t_2 = 1$. Единственное решение: $x = y = 1, z = 0$.

Ответ: одно решение.

Определение 1. Многочлен $F(x, y)$ от двух переменных x и y будем называть симметрическим, если $F(y, x) \equiv F(x, y)$.

Это значит, что если в многочлене поменять местами переменные, то мы получим многочлен, тождественный исходному. Симметрическими являются уже знакомые нам многочлены $x + y$ и xy, а также $x^2 + y^2$, $x - 3xy + y$, $x^5 + 2x^2 + y^5 + 2y^2$ и т. д. Здесь мы акцентируем внимание на симметрических многочленах, но, конечно, симметрическими могут быть и другие выражения:

$$\frac{x^2+y^2}{x^6+2xy+y^6},\ \sqrt{2x}+\sqrt{2y},\ 2^x+2^y\ldots$$

На этот случай сформулируем более общее определение.

Определение 2. Выражение $F(x,y)$ от двух переменных x и y будем называть симметрическим, если $F(y,x)\equiv F(x,y)$.

Определение 3. Многочлены $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$ будем называть элементарными симметрическими.

Приведем без доказательства две теоремы, утверждения которых, возможно, многим покажутся очевидными.

Теорема 3. Если в любом многочлене $F(\sigma_1,\sigma_2)$ вместо σ_1 и σ_2 подставить соответственно $x+y$ и xy, то получится симметрический многочлен от x и y.

Теорема 4. Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от $x+y$ и xy.

Первая теорема дает нам метод конструирования симметрических многочленов. Вторая подсказывает подход к решению уравнений с такими многочленами.

Определение 4. Уравнение, в которое входят только симметрические выражения, будем называть симметрическим.

Разумеется, определенный в этой книге вид симметрии

уравнений не единственно возможный.
Из теоремы 4, в частности, следует, что через $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ можно выразить любой многочлен вида $x^n + y^n$, где n – натуральное число. Ниже приведен ряд полезных тождеств.

$$
\begin{gathered}
x + y = \sigma_1, \\
x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\
x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, \\
x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2, \\
x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2, \\
x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3, \\
x^7 + y^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3, \\
x^8 + y^8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4, \\
x^9 + y^9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4, \\
x^{10} + y^{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Второе тождество ($x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$) непосредственно следует из тождества $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. Умножим его левую и правую части на $x + y$.

$$(x^2 + y^2)(x + y) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(x + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - xy(x+y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Также последовательно доказываются и остальные тождества (3).

Пример 5.

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ (x+y)^2 - 2xy = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 6, \\ 36 - 2xy = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 4),\ (4; 2)$.

Пример 6.

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x+y) = 30. \end{cases} \quad \text{Замена переменных:} \begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u+v=11, \\ uv=30. \end{cases} \Rightarrow 1. \begin{cases} u=5, \\ v=6. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} u=6, \\ v=5. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} \Rightarrow 1.1. \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases} \quad 1.2. \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases} \Rightarrow 2.1. \begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases} \quad 2.2. \begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $(3;2),\ (2;3),\ (1;5),\ (5;1)$.

Пример 7.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}, \\ x^2+y^2=17. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{4}, \\ (x+y)^2-2xy=17; \end{cases} \quad \begin{cases} 4(x+y)=5xy, \\ (x+y)^2=17+2xy; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+y)^2=85+10xy, \\ -8(x+y)=-10xy; \end{cases} \quad \begin{cases} 5(x+y)^2-8(x+y)=85, \\ 5xy=4(x+y). \end{cases}$$

Пусть $t=x+y$. Тогда первое уравнение в последней фигурной скобке можно записать в виде $5t^2-8t-85=0$.

$D/4 = 16 + 425 = 441$, $\sqrt{D/4} = 21$, $t_{1,2} = \dfrac{4 \pm 21}{5}$. $t_1 = -\dfrac{17}{5}$, $t_2 = 5$. Поскольку $t = x + y$, а $xy = \dfrac{4}{5}(x + y)$, для каждого корня t получим систему уравнений:

$$1. \begin{cases} x + y = -\dfrac{17}{5}, \\ xy = -\dfrac{68}{25}, \end{cases}$$ где x и y – корни уравнения

$t^2 + \dfrac{17}{5}t - \dfrac{68}{25} = 0$. $\Rightarrow (5t)^2 + 17(5t) - 68 = 0$. Неизвестная величина здесь $5t$. $D = 561$. $5t_{1,2} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{561}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{561}}{10}$. Таким образом, мы получили два решения: $\left(\frac{-17-\sqrt{561}}{10}; \frac{-17+\sqrt{561}}{10}\right)$ и $\left(\frac{-17+\sqrt{561}}{10}; \frac{-17-\sqrt{561}}{10}\right)$.

$$2. \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases} \Rightarrow \text{ решения } (1; 4) \text{ и } (4; 1).$$

Ответ: $\left(\frac{-17-\sqrt{561}}{10}; \frac{-17+\sqrt{561}}{10}\right)$, $\left(\frac{-17+\sqrt{561}}{10}; \frac{-17-\sqrt{561}}{10}\right)$, $(1; 4)$ и $(4; 1)$.

Пример 8.

$$\begin{cases} x^8 + y^8 = \dfrac{41}{128}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x^4+y^4)^2-2x^4y^4=\dfrac{41}{128}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$ Повторим ту же процедуру:

$$\begin{cases} \left((x^2+y^2)^2-2x^2y^2\right)^2-2x^4y^4=\dfrac{41}{128}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$ Так как $x^2+y^2=1$,

$$\begin{cases} (1-2x^2y^2)^2-2x^4y^4=\dfrac{41}{128}, \\ x^2+y^2=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^4y^4-4x^2y^2+\dfrac{87}{128}=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Введем обозначение $z=x^2y^2$. Тогда $2z^2-4z+\dfrac{87}{2^7}=0$. $(16z)^2-32(16z)+87=0$. Неизвестная величина здесь $16z$. $D/4=16^2-87=169=13^2$. $16z_{1,2}=16\pm 13 \Rightarrow$ $\Rightarrow z_1=\dfrac{3}{16},\ \ z_2=\dfrac{29}{16}$. Осталось рассмотреть две системы уравнений, которые являются симметрическими относительно x^2 и y^2. Последнее означает, что если ввести замену переменных, например $u=x^2$, $v=y^2$, то получатся системы, симметрические относительно u и v.

$$1.\ \begin{cases} x^2y^2=\dfrac{3}{16}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad 1.1.\ \begin{cases} x^2=\frac{1}{4}, \\ y^2=\frac{3}{4}. \end{cases} \qquad 1.2.\ \begin{cases} x^2=\frac{3}{4}, \\ y^2=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} x^2y^2 = \dfrac{29}{16}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad t^2 - t + \frac{29}{16} = 0. \quad D = 1 - 4 \cdot \frac{29}{16} < 0.$$

Последняя система уравнений не имеет решения.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Геометрический смысл последнего задания: найти координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с кривой $x^8 + y^8 = \frac{41}{128}$. Любопытства ради посмотрим, что же это за кривая (рис. 2). Уравнение $x^n + y^n = r^n$ при возраста-

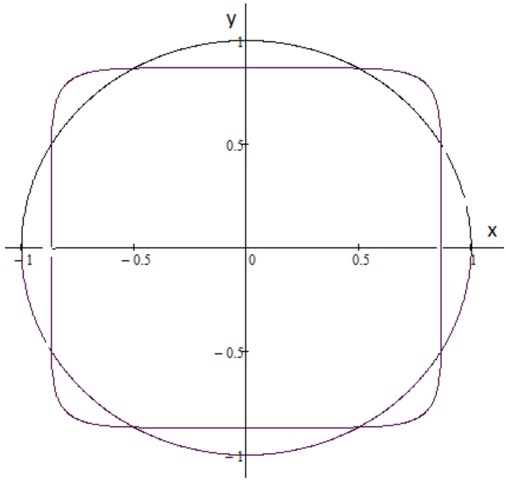

Рис. 2. Графики к примеру 8

нии n определяет фигуры, все более похожие на квадрат. В нашем случае $r = \sqrt[8]{\frac{41}{128}} \approx 0.867$.

Дружащий с тригонометрией школьник увидит в последнем задании подход к решению уравнения $\cos^8 t + \sin^8 t = \dfrac{41}{128}$. Если обозначить $\cos t = x$, $\sin t = y$ и учесть главное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, получим условия примера 7.

В следующем примере сведем уравнение с радикалами к симметрической системе уравнений.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{102-x} = 11$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x \in [1; 102]$. Обозначим:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x-1}, \\ v = \sqrt{102-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 11, \\ u^2 + v^2 = 101; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 11, \\ (u+v)^2 - 2uv = 101; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 11, \\ uv = 10. \end{cases} \quad 1. \begin{cases} u = 1, \\ v = 10. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} u = 10, \\ v = 1. \end{cases}$$

В первом случае получим $x = 2$, во втором $x = 101$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 101$.

Пример 10.

$$\begin{cases} x + y + 4xy = 6, \\ x + y + |x + y| = 6. \end{cases}$$

Решение. Если $x + y < 0$, второе уравнение примет вид $0 = 6$, и тогда система не имеет решения. Следовательно,

$x+y \geq 0$ и $|x+y|= x+y$.

$$\begin{cases} x+y+4xy=6, \\ x+y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=\dfrac{3}{4}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t^2-3t+\frac{3}{4}=0.$$

$(2t)^2-6(2t)+3=0$. $D/4=9-3=6$. $2t_{1,2}=3\pm\sqrt{6}$. $t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}; \frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}; \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)$.

Пример 11.

$$\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2y^2(x^2+y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{468}{13}.$$

$$\frac{x^2y^2}{x+y}=36. \quad \text{Введем обозначения:} \begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = 36u, \\ v^2(u^2 - 2v) = 468; \end{cases} \qquad \begin{cases} v^2 = 36u, \\ v^2\left((36u)^2 - 2\cdot 36^2 v\right) = 468\cdot 36^2. \end{cases}$$

$v^2\left(v^4 - 2\cdot 36^2 v\right) = 13\cdot 36^3 \Rightarrow v^6 - 2\cdot 36^2 v^3 - 13\cdot 36^3 = 0.$
Введем обозначение: $t = v^3$. Тогда $t^2 - 2\cdot 36^2 t - 13\cdot 36^3 = 0$.
$D/4 = 36^4 + 13\cdot 36^3 = 36^3\cdot 49 \Rightarrow \sqrt{D/4} = 6^3\cdot 7 = 1\ 512$.
$t_{1,2} = 1\ 296 \pm 1\ 512 \Rightarrow \quad t_1 = -216, \quad t_2 = 2\ 808$.
$t = v^3 \Rightarrow v = \sqrt[3]{t} \Rightarrow \quad v_1 = -6, \quad v_2 = 6\sqrt[3]{13}$.

$$1.\ \begin{cases} 36u = v^2, \\ v = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1, \\ v = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6. \end{cases}$$

Откуда следуют два решения: $(3; -2)$ и $(-2; 3)$.

$$2.\ \begin{cases} 36u = v^2, \\ v = 6\sqrt[3]{13}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 13^{\frac{2}{3}}, \\ v = 6\cdot 13^{\frac{1}{3}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 13^{\frac{2}{3}}, \\ xy = 6\cdot 13^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

x и y ищем как корни уравнения $t^2 - 13^{\frac{2}{3}}t + 6\cdot 13^{\frac{1}{3}}$.
$D = 13^{\frac{4}{3}} - 24\cdot 13^{\frac{1}{3}} = 13^{\frac{1}{3}}(13 - 24) < 0$. Решений нет.

Ответ: $(3; -2)$ и $(-2; 3)$.

Пример 12.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ (x^2+y^2)^2-(xy)^2=931; \end{cases} \begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=931. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=49, \\ x^2-xy+y^2=19; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2-2xy=34, \\ xy=15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=64, \\ xy=15. \end{cases} \quad \Rightarrow 1. \begin{cases} x+y=-8, \\ xy=15. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+y=8, \\ xy=15. \end{cases}$$

Ответ: $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$.

Пример 13.

$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-6\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=2, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2$. Тогда первое уравнение примет вид

$$4\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\right)-6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=2.$$

Пусть $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=t$. После элементарных преобразований получим: $4t^2-6t-10=0$. Корни: $t_1=-1$, $t_2=\frac{5}{2}$. Заметив, что $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, рассмотрим два случая:

$$1.\ \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{xy}=-1,\\ x^2+y^2=5;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+y^2=5,\\ xy=-5;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x+y)^2=-5,\\ xy=-5.\end{cases}$$

Поскольку квадрат вещественного числа не может быть отрицательной величиной, система не имеет решений.

$$2.\ \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2},\\ x^2+y^2=5;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+y^2=5,\\ xy=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=\pm 3,\\ xy=2.\end{cases}$$

Осталось воспользоваться теоремой Виета.

Ответ: $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$.

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^8+y^8+x^4+y^4=274,\\ xy=2.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}(x^4+y^4)^2-2x^4y^4+x^4+y^4=274,\\ x^4y^4=16.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x^4+y^4)^2+x^4+y^4-306=0,\\ x^4y^4=16.\end{cases}$$

Обозначим $t=x^4+y^4$. $t\geq 0$. $t^2+t-306=0$. Заметим, что $306=17\cdot 18$. $t_1=-18$, $t_2=17$. Отрицательный корень отбрасываем. Тогда

$$\begin{cases}x^4+y^4=17,\\ x^4y^4=16.\end{cases} \Rightarrow\ t^2-17t+16=0.\ t_1=1,\ t_2=16.$$

$$1.\ \begin{cases}x^4=1,\\ y^4=16;\end{cases} \quad \begin{cases}x=\pm 1,\\ y=\pm 2.\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases}x^4=16,\\ y^4=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x=\pm 2,\\ y=\pm 1.\end{cases}$$

Поскольку $xy=2$, x и y должны иметь один знак.

Ответ: $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$.

Исследуем три системы уравнений с параметром.

В общем случае решить систему с параметром – значит для любого значения параметра найти все решения системы или установить отсутствие решений. Но условия конкретной задачи, как в следующем примере, могут быть менее жесткими.

Пример 15 (ЕГЭ, 2020). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |a+1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Введем обозначение $x^2 = z$. Теперь систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y + z = |a+1|, \\ y^2 + z^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = |a+1|, \\ (y+z)^2 - 2yz = a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = |a+1|, \\ (a+1)^2 - 2yz = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = |a+1|, \\ yz = a + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поскольку каждому положительному значению z соответствует два значения $x = \pm\sqrt{z}$, нам достаточно определить, при каких значениях a последняя система уравнений име-

ет два положительных решения. Эти решения будем искать как корни квадратного трехчлена $t^2-|a+1|\cdot t+a+\frac{1}{2}$.
$D=a^2+2a+1-4a-2=a^2-2a-1=(a-a_1)(a-a_2)$, где $a_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.
1) При $a\in(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$ получим $D<0$ – трехчлен не имеет вещественных корней;
2) при $a=1\pm\sqrt{2}$ трехчлен имеет два совпадающих корня;
3) при $a\in(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$ – два различных корня $t_{1,2}=\dfrac{|a+1|\pm\sqrt{a^2-2a-1}}{2}$.
Осталось исключить случаи, когда один из корней отрицателен или равен нулю.
$t_1=\dfrac{|a+1|+\sqrt{a^2-2a-1}}{2}$ всегда неотрицателен, а также не равен 0, так как выражения под модулем и под знаком радикала одновременно в ноль не обращаются.
$t_2=\dfrac{|a+1|-\sqrt{a^2-2a-1}}{2}\le 0 \;\Rightarrow\; |a+1|\le\sqrt{a^2-2a-1}$.
$a^2+2a+1\le a^2-2a-1 \;\Rightarrow\; a\le -0,5$.

$$(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)\setminus(-\infty;-0,5]=$$
$$=(-0,5;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty).$$

Ответ: $(-0,5;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$.

Пример 16 (ЕГЭ, 2020). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay - ax + 2)(y - x + 3a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

Решение. Из второго уравнения следует, что $a \geq 0$. Рассмотрим случай $a = 0$. Тогда из первого уравнения следует $x = y$, а из второго $xy = 0$. Значит, при $a = 0$ существует единственное решение: $x = y = 0$. Этот случай нас не интересует. В дальнейшем будем рассматривать только $a > 0$. Введем замену переменной $z = -x$. Теперь систему можно переписать в виде

$$\begin{cases}(y + z = -\frac{2}{a}) \vee (y + z = -3a),\\ (yz = a) \vee (yz = -a),\end{cases} \quad \text{где } \vee \text{ – логическое «или».}$$

Таким образом, нам следует рассмотреть четыре случая:

$$1. \begin{cases}y + z = -\frac{2}{a},\\ yz = a.\end{cases} \quad \Rightarrow \; t^2 + \frac{2}{a}t + a = 0, \; D = 4 \cdot \frac{1 - a^3}{a^2}.$$

$D > 0$ при $a \in (0; 1)$ – два решения; $D = 0$ при $a = 1$ –

одно решение.

$$2.\ \begin{cases} y+z=-3a, \\ yz=a. \end{cases} \quad \Rightarrow\ t^2+3at+a=0,\ D=a(9a-4).$$

$D>0$ при $a\in(\frac{4}{9};+\infty)$ – два решения; $D=0$ при $a=\frac{4}{9}$ – одно решение.

$$3.\ \begin{cases} y+z=-\frac{2}{a}, \\ yz=-a. \end{cases} \quad \Rightarrow\ t^2+\frac{2}{a}t-a=0,\ D=4\cdot\frac{1+a^3}{a^2}.$$

$D>0$ при $a\in(0;+\infty)$ – два решения.

$$4.\ \begin{cases} y+z=-3a, \\ yz=-a. \end{cases} \quad \Rightarrow\ t^2+3at-a=0,\ D=a(9a+4).$$

$D>0$ при $a\in(0;+\infty)$ – два решения.

Помним, что нас интересуют только положительные значения a. В двух последних пунктах имеем в сумме четыре решения при всех a из интервала $(0;+\infty)$. Остальные четыре принадлежат пересечению интервалов $a\in(0;1)$ и $(\frac{4}{9};+\infty)$ из первых двух пунктов, на каждом из которых имеется два решения: $(0;1)\cap(\frac{4}{9};+\infty)=(\frac{4}{9};1)$. Однако решения могут совпадать при $\frac{2}{a}=3a$, т. е. при $a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отрицательный корень нас не интересует, а положительный, как легко проверить, $\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{4}{9}$. Исключим этот случай. Система уравнений будет иметь ровно восемь решений при $a \in (\frac{4}{9}; \sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}; 1)$.

Ответ: $(\frac{4}{9}; \sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}; 1)$.

Обычно графики строят в процессе работы над задачей. В нашем случае обратимся к ним для анализа результатов. График первого уравнения распадается на две параллельные прямые, график второго – на две гиперболы. Решениям соответствуют точки пересечения прямых с гиперболами. Как видно на рис. 3, при $a = \frac{4}{9}$ (левая граница интервала $\left(\frac{4}{9}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$) таких пересечений семь, при $a = \frac{2}{3}$ (внутри интервала $\left(\frac{4}{9}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$) – восемь пересечений. На рис. 4

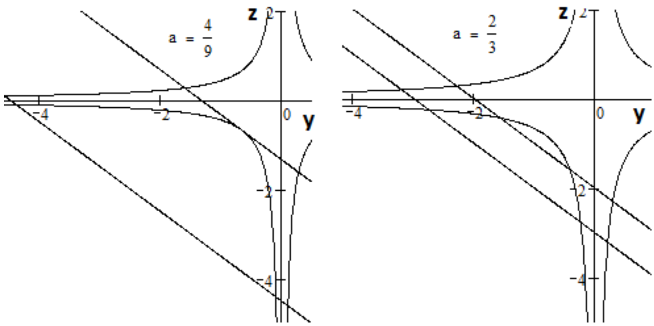

Рис. 3. Графики к примеру 16: $a = \frac{4}{9}$ (слева); $a = \frac{2}{3}$ (справа)

при $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (две прямые совпадают) – четыре точки, при

$a = \frac{9}{10}$ (внутри интервала $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right)$) – восемь точек. На

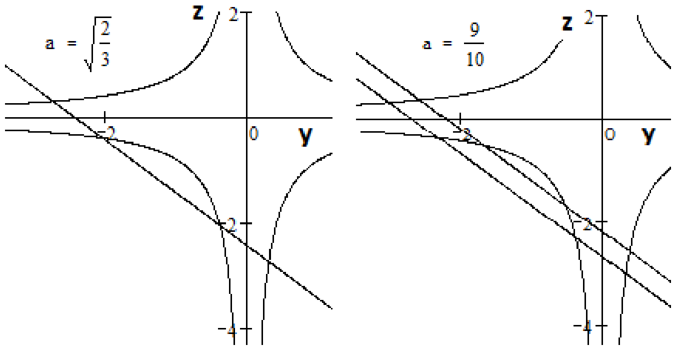

Рис. 4. Графики к примеру 16: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (слева); $a = \frac{9}{10}$ (справа)

рис. 5 при $a = 1$ (граница интервала $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right)$) – восемь точек пересечения, при $a = \frac{4}{3}$ (точка справа от 1) – четыре точки пересечения. При движении a слева направо вдоль

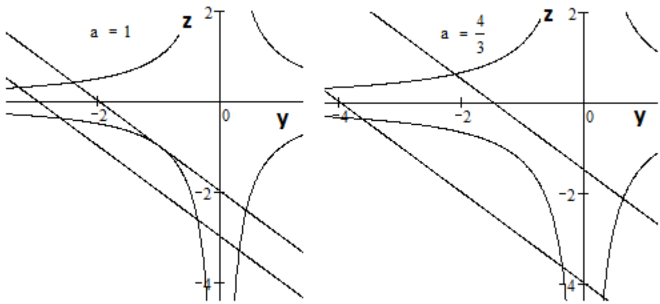

Рис. 5. Графики к примеру 16: $a = 1$ (слева); $a = \frac{4}{3}$ (справа)

вещественной оси одна прямая на графике поднимается вверх параллельно самой себе, а другая опускается вниз.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$$

Решение. Из вида уравнений следует, что $a \geq 0$. График первого уравнения – квадрат, второго – окружность радиусом $\sqrt{a}$ (рис 6). Если радиус окружности меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$

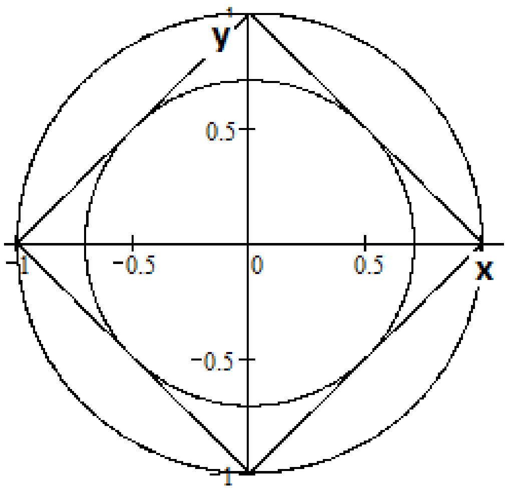

Рис. 6. Графики к примеру 17

или больше 1, система не имеет решений. При радиусе, равном $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или 1, существуют четыре решения, а если значение радиуса принадлежит интервалу $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ – восемь решений, т. е. окружность пересекает квадрат в восьми точках. Теперь перейдем к аналитическому решению.

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ (|x|+|y|)^2-2|x||y|=a; \end{cases} \qquad \begin{cases} |x|+|y|=1, \\ |x||y|=\frac{1-a}{2}. \end{cases}$$

$t^2-t+\frac{1-a}{2}=0.$ $D=2a-1.$

1. $D<0$ при $a<\frac{1}{2}$. Решений нет.

2. $D=0$ при $a=\frac{1}{2} \Rightarrow |x|=|y|=\frac{1}{2}$.

3. $D>0$ при $a>\frac{1}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}$.

Однако $|x|\geq 0$, $|y|\geq 0$. Значит, $(t_1\geq 0)\&(t_2\geq 0)$. $t_1=\dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\geq 0$ при любом допустимом a. $t_2=\dfrac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\geq 0$, когда $\sqrt{2a-1}\leq 1 \Rightarrow a\leq 1$. $a=1\Rightarrow t_1=0$, $t_2=1$. Соответственно $|x|=0, |y|=1$ или $|x|=1, |y|=0$. При $a>1$ Решений нет. Теперь мы можем сформулировать ответ.

Ответ: При $a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$ Решений нет;
при $a=\frac{1}{2}$ – четыре решения: $(\frac{1}{2};\frac{1}{2}), (\frac{1}{2};-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2};\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$;
при $a\in(\frac{1}{2};1)$ – восемь решений:
$\left(\pm\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2};\pm\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2};\pm\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\right)$,
$\left(\pm\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2};\mp\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2};\mp\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\right)$;
при $a=1$ – четыре решения: $(1;0), (0;1), (-1;0), (0;-1)$.

Следующее задание для тех, кто дружит с логарифмами.

Пример 18 (вступительный экзамен, математический факультет ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1979). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 20, \\ x^{\lg y} = 2. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ: $(x > 0)\&(y > 0)$. Возьмем логарифмы от левых и правых частей уравнений.

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1 + \lg 2, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 2. \end{cases} \Rightarrow 1. \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = \lg 2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \lg x = \lg 2, \\ \lg y = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 10, y = 2$ и $x = 2, y = 10$.

Ответ: $(10; 2)$ и $(2; 10)$.

Пример 19 (вступительный экзамен, математический факультет Московского областного педагогического института им. Н. К. Крупской, 1979). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x + y} = t$, $t \geq 0$. Первое уравнение примет вид $t^2 + t - 20 = 0 \Rightarrow\ t_1 = -5,\ t_2 = 4$. Условию

$t \geq 0$ удовлетворяет $t = 4$. $x + y = t^2 = 16$.

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ x^2 + y^2 = 136; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 16, \\ (x+y)^2 - 2xy = 136; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ xy = 60. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1. \begin{cases} x = 6, \\ y = 10. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = 10, \\ y = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(6; 10)$ и $(10; 6)$.

1.2. Задачи

$\boxed{7 \Leftrightarrow 41}$

1. $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 12. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -12. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -14. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -21. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=-12. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=18. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=-45. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=3. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x+y=\sqrt{3}+1, \\ xy=\sqrt{3}. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x+y=-2, \\ xy=-2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-1. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x+y=\sqrt{2}+\sqrt{3}, \\ xy=\sqrt{6}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-1. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=5. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7. \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=-7. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15. \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} x^2+y^2=101, \\ x+y=11. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ xy=-4. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y=3. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x+y=5. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ xy=-5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy-2(x+y)=2, \\ xy+x+y=29. \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ xy=-7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15. \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 79, \\ xy = 15. \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + xy + y^2 = 52. \end{cases}$

38. $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y + x^2 + y^2 = 42. \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x - 2xy + y = -2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 - xy = -7. \end{cases}$ **43.** $\begin{cases} x + y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 43. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x + y + 4xy = 6, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$ **45.** $\begin{cases} xy - 3x - 3y = -8, \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = -12. \end{cases}$

46. $\begin{cases} xy - 7x - 7y = -9, \\ x^2 + y^2 + 11(x + y) = 16. \end{cases}$ **47.** $\begin{cases} xy - 3x - 3y = -5, \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x^2 + xy + 2y^2 - x - y = 3, \\ x^2 + y^2 - 5xy + 3x + 3y = 3. \end{cases}$ **49.** $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1. \end{cases}$ **51.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21. \end{cases}$

52. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133, \\ x + y = 7. \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x^2y + xy^2 = 12. \end{cases}$

54. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91. \end{cases}$ **55.** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 609. \end{cases}$ **57.** $\begin{cases} xy = 3, \\ x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = 92. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ xy(x^2 + y^2) = 2. \end{cases}$ **59.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$ **61.** $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy + 2x + 2y = 5, \\ xy + x + y = 3. \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = 9. \end{cases}$ **63.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ xy = -2. \end{cases}$ **64.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}, \\ x + y = 8. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$ **66.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}, \\ xy = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$ **67.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$ **69.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}, \\ xy(x + y) = 20. \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4. \end{cases}$ **72.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{8}{7}, \\ x + y = 8. \end{cases}$ **73.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 160. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$ **75.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{2}, \\ x + y = 1. \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{29}{10}. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}, \\ x + y = 1. \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{97}{36}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{97}{36}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{17}{4}. \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{7}{16}, \\ xy=8. \end{cases}$ **84.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

85. $\begin{cases} xy(x+y)=2, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2. \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{x-3}{y+4}+\dfrac{y-3}{x+4}=-\dfrac{1}{20}. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x^2y+xy^2=-2, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **88.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

89. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-9\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=-14, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

90. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=21, \\ xy=36. \end{cases}$ **91.** $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{xy}{2}, \\ xy=48. \end{cases}$

92. $\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$ **93.** $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

94. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=10. \end{cases}$ **95.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{41}{20}, \\ x+y=41. \end{cases}$

§ 2. Симметрия относительно выражений

2.1. Теория и примеры

$\boxed{35 \Leftrightarrow 50}$ Пусть $F\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$ – многочлен от двух выражений: $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.

Определение 5. Будем говорить, что многочлен $F\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$ симметричен относительно выражений $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, если имеет место тождество $F\left(\psi(x,y),\varphi(x,y)\right) \equiv F\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$.

Заметим, что $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в общем случае несимметричны, а значит, и $F\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$ в общем случае не является симметрическим выражением от x и y.

Определение 6. Будем называть систему уравнений симметрической относительно $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, если все входящие в нее выражения симметричны относительно $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.

Пример 13.

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (2x)+(-3y)=5, \\ (2x)(-3y)=-36, \end{cases} \Rightarrow t^2-5t-36=0 \Rightarrow t_1=-4, t_2=9.$$

$$1.\ \begin{cases} 2x = -4, \\ -3y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -3. \end{cases} \quad 2.\ \begin{cases} 2x = 9, \\ -3y = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{9}{2}, \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -3)$, $\left(\frac{9}{2}; \frac{4}{3}\right)$.

Разберем решение. Левую и правую части второго уравнения мы умножили на 2 и на -3 и, таким образом, получили систему, симметричную относительно выражений $(2x)$ и $(-3y)$. Далее, опираясь на обратную теорему Виета, нашли значения этих выражений как корней некоторого квадратного уравнения, а затем и сами неизвестные.

Пример 14.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 24, \\ xy = -1. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (5x) + (-2y) = 24, \\ (5x)(-2y) = 10. \end{cases} \Rightarrow t^2 - 24t + 10 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 12 \pm \sqrt{134}.$$

$$1.\ \begin{cases} 5x = 12 - \sqrt{134}, \\ -2y = 12 + \sqrt{134}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{12-\sqrt{134}}{5}, \\ y = \frac{-12-\sqrt{134}}{2}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 5x = 12 + \sqrt{134}, \\ -2y = 12 - \sqrt{134}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{12+\sqrt{134}}{5}, \\ y = \frac{-12+\sqrt{134}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{12-\sqrt{134}}{5};\frac{-12-\sqrt{134}}{2}\right)$, $\left(\frac{12+\sqrt{134}}{5};\frac{-12+\sqrt{134}}{2}\right)$.
Тот, кому приходилось решать такие системы методом подстановки, согласится, что у нас это получилось быстро и без особого напряжения.

Пример 15.

$$\begin{cases} x+y=8, \\ (x-3)(y+1)=8. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x-3)+(y+1)=6, \\ (x-3)(y+1)=8; \end{cases} \quad 1.\begin{cases} x-3=2, \\ y+1=4. \end{cases} \quad 2.\begin{cases} x-3=4, \\ y+1=2. \end{cases}$$

Ответ: $(5;3)$, $(7;1)$.

Пример 16.

$$\begin{cases} x+y=5, \\ (x-2)(y+4)=3. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x-2)+(y+4)=7, \\ (x-2)(y+4)=3. \end{cases} \Rightarrow t^2-7t+3=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}.$$

$$1.\ \begin{cases} x-2=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}, \\ y+4=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{11-\sqrt{37}}{2}, \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} x-2=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}, \\ y+4=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{11+\sqrt{37}}{2}, \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{11-\sqrt{37}}{2}; \frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right)$, $\left(\frac{11+\sqrt{37}}{2}; \frac{-1-\sqrt{37}}{2}\right)$.

Пример 17.

$$\begin{cases} 3x+5y=11, \\ (x+1)(y-2)=-4. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 3x+5y=11, \\ (3x+3)(5y-10)=-60; \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x+3)+(5y-10)=4, \\ (3x+3)(5y-10)=-60. \end{cases}$$

$$t^2-4t-60=0 \Rightarrow\ t_1=10,\ t_2=-6.$$

$$1.\ \begin{cases} 3x+3=10, \\ 5y-10=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=7, \\ 5y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{7}{3}, \\ y=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 3x+3=-6, \\ 5y-10=10; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=-9, \\ 5y=20; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{5}\right)$, $(-3; 4)$.

Пример 18.

$$\begin{cases} 3x-4y=5, \\ (x-2)(y-3)=2. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 3x-4y=5, \\ (3x-6)(-4y+12)=-24; \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x-6)+(-4y+12)=11, \\ (3x-6)(-4y+12)=-24. \end{cases}$$

$$t^2-11t-24=0 \Rightarrow\ t_1=\frac{11+\sqrt{217}}{2},\ t_2=\frac{11-\sqrt{217}}{2}.$$

$$1.\ \begin{cases} 3x-6=\dfrac{11+\sqrt{217}}{2}, \\ -4y+12=\dfrac{11-\sqrt{217}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{23+\sqrt{217}}{6}, \\ y=\dfrac{13+\sqrt{217}}{8}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 3x-6=\dfrac{11-\sqrt{217}}{2}, \\ -4y+12=\dfrac{11+\sqrt{217}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{23-\sqrt{217}}{6}, \\ y=\dfrac{13-\sqrt{217}}{8}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{23+\sqrt{217}}{6}; \frac{13+\sqrt{217}}{8}\right)$, $\left(\frac{23-\sqrt{217}}{6}; \frac{13-\sqrt{217}}{8}\right)$.

Следующий прием основан на тождестве, доказательство которого не составляет труда:

$$xy + ax + by = (x + b)(y + a) - ab.$$

Пример 19.

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 3x - 2y + xy = 14. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ (x - 2)(y + 3) + 6 = 14; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - 2) + (y + 3) = 9, \\ (x - 2)(y + 3) = 8. \end{cases}$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 8.$$

$$1.\ \begin{cases} x - 2 = 1, \\ y + 3 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases} \quad 2.\ \begin{cases} x - 2 = 8, \\ y + 3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 5)$, $(10; -2)$.

Пример 20.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 5y + xy = -2. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ (x+5)(y+2)=8; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)+(y+2)=12, \\ (x+5)(y+2)=8. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t^2-12t+8=0 \Rightarrow \quad t_{1,2}=6\pm 2\sqrt{7}.$$

$$1. \begin{cases} x+5=6-2\sqrt{7}, \\ y+2=6+2\sqrt{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2\sqrt{7}, \\ y=4+2\sqrt{7}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+5=6+2\sqrt{7}, \\ y+2=6-2\sqrt{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+2\sqrt{7}, \\ y=4-2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Ответ: $\big(1-2\sqrt{7}; 4+2\sqrt{7}\big)$, $\big(1+2\sqrt{7}; 4-2\sqrt{7}\big)$.

Пример 21.

$$\begin{cases} 4x+7y=15, \\ 3x-5y+2xy=5. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 4x+7y=15, \\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}y+xy=\dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+7y=15, \\ \left(x-\dfrac{5}{2}\right)\left(y+\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+7y=15, \\ (4x-10)\left(7y+\dfrac{21}{2}\right)=-35; \end{cases} \begin{cases} (4x-10)+\left(7y+\dfrac{21}{2}\right)=\dfrac{31}{2}, \\ (4x-10)\left(7y+\dfrac{21}{2}\right)=-35. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t^2-\frac{31}{2}t-35=0 \Rightarrow \quad t_1=-2,\ t_2=\frac{35}{2}.$$

$$1.\ \begin{cases} 4x-10=-2, \\ 7y+\dfrac{21}{2}=\dfrac{35}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=8, \\ 7y=7; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 4x-10=\dfrac{35}{2}, \\ 7y+\dfrac{21}{2}=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=\dfrac{55}{2}, \\ 7y=-\dfrac{25}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{55}{8}, \\ y=-\dfrac{25}{14}. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$, $\left(\frac{55}{8};-\frac{25}{14}\right)$.

Не проще ли было в первом уравнении выразить x через y и подставить во второе? Возможно. Однако здесь мы всего лишь иллюстрируем прием, который в другой ситуации может оказаться более эффективным.

Пример 22.

$$\begin{cases} x+y=-8, \\ x^2+y^2+6x+2y=0. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x + y = -8, \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+3) + (y+1) = -4, \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x + 3, \\ v = y + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = -4, \\ u^2 + v^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = -4, \\ (u+v)^2 - 2uv = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = -4, \\ uv = 3. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1,\ t_2 = -3.$$

$$1. \begin{cases} u = -1, \\ v = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3 = -1, \\ y + 1 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u = -3, \\ v = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3 = -3, \\ y + 1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -4)$, $(-6; -2)$.

Пример 23.

$$\begin{cases} xy + x^2 = 2, \\ 2x + 3y = 4. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x(x+y) = 2, \\ 3(x+y) - x = 4. \end{cases}$$

Введем замену переменных $x + y = z$.

$$\begin{cases} -x + 3z = 4, \\ xz = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (-x) + (3z) = 4, \\ (-x)(3z) = -6. \end{cases}$$

$$t^2 - 4t - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}.$$

$$1. \begin{cases} -x = 2 - \sqrt{10}, \\ 3(x+y) = 2 + \sqrt{10}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 + \sqrt{10}, \\ y = \frac{8-2\sqrt{10}}{3}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x = 2 + \sqrt{10}, \\ 3(x+y) = 2 - \sqrt{10}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 - \sqrt{10}, \\ y = \frac{8+2\sqrt{10}}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2 + \sqrt{10}; \frac{8-2\sqrt{10}}{3}\right)$, $\left(-2 - \sqrt{10}; \frac{8+2\sqrt{10}}{3}\right)$.

2.2. Задачи

$\boxed{41 \Leftrightarrow 54}$

96. $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ xy = 2. \end{cases}$ **97.** $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ xy = 6. \end{cases}$ **98.** $\begin{cases} 2x - 5y = -4, \\ xy = 6. \end{cases}$

99. $\begin{cases} 3x - 7y = 8, \\ xy = 5. \end{cases}$ **100.** $\begin{cases} 5x + y = -5, \\ xy = -10. \end{cases}$ **101.** $\begin{cases} 5x - 2y = 10, \\ xy = 20. \end{cases}$

102. $\begin{cases} 11x - 3y = 3, \\ xy = 30. \end{cases}$ **103.** $\begin{cases} 2x + 3y = 43, \\ xy = 72. \end{cases}$ **104.** $\begin{cases} 5x - 4y = 5, \\ xy = 15. \end{cases}$

105. $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ xy = -4. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x - 7y = -1, \\ xy = 6. \end{cases}$ **107.** $\begin{cases} 2x + 5y = -2, \\ xy = -12. \end{cases}$

108. $\begin{cases} 2x + 5y = 2, \\ xy = 5. \end{cases}$ **109.** $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ xy = 2. \end{cases}$ **110.** $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ xy = 2. \end{cases}$

111. $\begin{cases} 7x + 2y = 20, \\ xy = -1. \end{cases}$ **112.** $\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ xy = -3. \end{cases}$ **113.** $\begin{cases} 2x + 6y = 13, \\ xy = 2. \end{cases}$

114. $\begin{cases} 2x - 9y = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$ **115.** $\begin{cases} 7x - 5y = -14, \\ xy = 1. \end{cases}$ **116.** $\begin{cases} 3x + 6y = -18, \\ xy = 3. \end{cases}$

117. $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x + 2)(y + 3) = 24. \end{cases}$ **118.** $\begin{cases} x + y = -3, \\ (x - 2)(y + 1) = -5. \end{cases}$

119. $\begin{cases} x + y = 7, \\ (x + 2)(y - 3) = 8. \end{cases}$ **120.** $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x + 3)(y + 3) = 24. \end{cases}$

121. $\begin{cases} x + y = -7, \\ (x - 2)(y + 2) = 12. \end{cases}$ **122.** $\begin{cases} x + y = 2, \\ (x + 5)(y - 3) = -12. \end{cases}$

123. $\begin{cases} x+y=20, \\ (x-8)(y-2)=16. \end{cases}$

124. $\begin{cases} x+y=-12, \\ (x+10)(y+6)=4. \end{cases}$

125. $\begin{cases} x+y=5, \\ (x+1)(y+2)=7. \end{cases}$

126. $\begin{cases} x+y=7, \\ (x-1)(y-3)=2. \end{cases}$

127. $\begin{cases} x+y=2, \\ (x+3)(y-2)=5. \end{cases}$

128. $\begin{cases} x+y=8, \\ (x+2)(y+4)=2. \end{cases}$

129. $\begin{cases} x+y=-6, \\ (x-2)(y+5)=3. \end{cases}$

130. $\begin{cases} x+y=1, \\ (x-5)(y-6)=2. \end{cases}$

131. $\begin{cases} x+y=3, \\ (x-5)(y+6)=4. \end{cases}$

132. $\begin{cases} x+y=2, \\ (x+1)(y+2)=-3. \end{cases}$

133. $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ (x+2)(y+1)=9. \end{cases}$

134. $\begin{cases} 5x-y=2, \\ (x+3)(y-2)=4. \end{cases}$

135. $\begin{cases} 3x+4y=-7, \\ (x-5)(y+2)=-6. \end{cases}$

136. $\begin{cases} x-7y=1, \\ (x-2)(y-3)=-12. \end{cases}$

137. $\begin{cases} 3x+y=-2, \\ (x+3)(y-5)=-8. \end{cases}$

138. $\begin{cases} 2x-5y=-1, \\ (x+3)(y+5)=30. \end{cases}$

139. $\begin{cases} 2x - 3y = 20, \\ (x + 10)(y + 5) = 2. \end{cases}$

140. $\begin{cases} 3x + 5y = 2, \\ (x + 2)(y - 1) = 3. \end{cases}$

141. $\begin{cases} 7x - 5y = 3, \\ (x - 3)(y + 5) = 5. \end{cases}$

142. $\begin{cases} 2x - y = -2, \\ (x - 1)(y - 1) = 5. \end{cases}$

143. $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 8y + xy = -6. \end{cases}$

144. $\begin{cases} x + y = -2, \\ 2x + y + xy = -14. \end{cases}$

145. $\begin{cases} x + y = 8, \\ 7x + 3y + xy = 44. \end{cases}$

146. $\begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - 8y - xy = 36. \end{cases}$

147. $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5x + 2y + 2xy = 28. \end{cases}$

148. $\begin{cases} x + y = -4, \\ 3x + 5y - 3xy = -28. \end{cases}$

§ 3. Системы трех уравнений

3.1. Теория и примеры

$\boxed{50 \Leftrightarrow 70}$ Докажем теорему Виета для случая многочлена 3-й степени. Пусть многочлен представлен в виде

$$x^3 + px^2 + rx + q \tag{4}$$

и имеет вещественные корни x_1, x_2 и x_3. Тогда его можно разложить в произведение линейных членов:

$$x^3 + px^2 + rx + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$\begin{aligned}&(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =\\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при степенях x:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = r, \\ x_1x_2x_3 = -q. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 5 (теорема Виета). Если x_1, x_2 и x_3 – корни многочлена (4), то их сумма равна коэффициенту при x^2 с противоположным знаком, сумма попарных произведений – коэффициенту при x, а произведение $x_1x_2x_3$ – свободному члену с противоположным знаком (5).

Теорема 6 (обратная теорема Виета). Если переменные x_1, x_2 и x_3 удовлетворяют условиям (5), то они являются корнями многочлена (4).

Определение 7. Многочлен $F(x, y, z)$ от трех переменных x, y и z будем называть симметрическим, если в результате любых перестановок входящих в него переменных x, y и z получается многочлен, тождественный исходному.

Например, $F(z, x, y) \equiv F(x, y, z)$. Следует обратить внимание на то, что симметричностью многочлен обладает только относительно заданного набора переменных. Так, многочлен $x+y$ симметричен относительно x и y, но несимметричен относительно x, y и z.

Как и в случае двух переменных, симметрическими могут быть не только многочлены, но и другие выражения, например: $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz}$, $\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}$, $2^x+2^y+2^z$.

Определение 8. Выражение $F(x, y, z)$ от трех переменных x, y и z будем называть симметрическим, если в результате любых перестановок входящих в него переменных x, y и z получается выражение, тождественное исходному.

Определение 9. Многочлены $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$ и $\sigma_3 = xyz$ – элементарные симметрические многочлены от переменных x, y и z.

Приведем без доказательства две теоремы.

Теорема 6. Если в любом многочлене $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ вместо σ_1, σ_2 и σ_3 подставить соответственно $x+y+z$, $xy+xz+yz$ и xyz, то получится симметрический многочлен.

Теорема 7. Любой симметрический многочлен от x, y и z можно представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$ и $\sigma_3 = xyz$.

В частности:

$$\begin{gathered} x + y + z = \sigma_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\ x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3. \qquad (6) \end{gathered}$$

Еще три полезных тождества:

$$
\begin{gathered}
x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,\\
x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3,\\
x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Определение 10. Уравнение, в которое входят только симметрические по заданному набору переменных выражения, будем называть симметрическим.

Пример 24.

$$
\begin{cases}
x + y + z = -2,\\
xy + xz + yz = -5,\\
xyz = 6.
\end{cases}
$$

Решение. Согласно обратной теореме Виета x, y и z должны быть корнями многочлена $t^3 + 2t^2 - 5t - 6$. Ищем целые корни среди делителей свободного члена (-6). Подстановка показывает, что одним из корней будет $t_1 = -1$. В таком случае наш многочлен должен без остатка делиться на $t + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
t^3+2t^2-5t-6 & t+1 \\ \cline{2-2}
t^3+t^2 & t^2+t-6 \\ \hline
t^2-5t & \\
t^2+t & \\ \hline
-6t-6 & \\
-6t-6 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Найдем корни частного t^2+t-6 и запишем:

$$t^3+2t^2-5t-6=(t+1)(t^2+t-6)=(t+1)(t+3)(t-2).$$

Таким образом, многочлен имеет три корня: $t_1 = -1$, $t_2 = -3$ и $t_3 = 2$. В силу симметричности системы уравнений, ее решениями будут все возможные перестановки этих значений: $x_1=-1, y_1=-3, z_1=2$; $\quad x_2=-1, y_2=2$, $z_2=-3$ и т. д.

Ответ: $(-1;-3;2)$, $(-1;2;-3)$, $(-3;-1;2)$, $(-3;2;-1)$, $(2;-1;-3)$, $(2;-3;-1)$.

Пример 25.

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+xz+yz=1, \\ xyz=-2. \end{cases}$$

Решение: x, y и z должны быть корнями многочлена t^3-3t^2+t+2. Ищем целые корни среди делителей свободного члена 2. Подстановка показывает, что одним из корней будет $t_1 = 2$. В таком случае наш многочлен должен без остатка делиться на $(t-2)$.

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t^2+t+2 & \quad t-2 \\ \cline{2-2} t^3-2t^2 \qquad & t^2-t-1 \\ \cline{1-1} -t^2+t & \\ -t^2+2t & \\ \cline{1-1} -t+2 & \\ -t+2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Найдем корни трехчлена t^2-t-1: $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $t_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$t^3-3t^2+t+2 = (t-2)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

В силу симметричности системы уравнений, ее решениями будут все возможные перестановки значений t_1, t_2 и t_3.

Ответ: $\left(2; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(2; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 2; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

Пример 26.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 3, \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Решение. Введем обозначения:

$$\begin{cases} a = \dfrac{x}{y}, \\ b = \dfrac{y}{z}, \\ a = \dfrac{z}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3, \\ ab + ac + bc = 3, \\ abc = 1. \end{cases}$$

Значения a, b и c должны быть корнями многочлена $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 \Rightarrow (t-1)^3 = 0$. Три совпадающих корня. Следовательно, $a = b = c \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{x} = 1$. Далее $x = y = z$. Из условия $x + y + z = 3$ следует $x = y = z = 1$.

Ответ: $(1; 1; 1)$.

Пример 27.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 48. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулами (6) на с. 56.

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1, \\ xy+xz+yz=\sigma_2, \\ xyz=\sigma_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1=6, \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=12, \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=48. \end{cases}$$

Применяя поочередную подстановку, находим $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\begin{cases} \sigma_1=6, \\ \sigma_2=12, \\ \sigma_3=8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=12, \\ xyz=8. \end{cases}$$

Значения x, y и z должны быть корнями многочлена $t^3-6t^2+12t-8 \Rightarrow (t-2)^3=0$. Три совпадающих корня. Следовательно, $x=y=z=2$.

Ответ: $(2;2;2)$.

Пример 28.

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$$

Решение. Раскроем скобки во втором и третьем уравнениях системы и обратимся к формулам (6) и (7) на с. 56.

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases}\sigma_1 = 2,\\ 3\sigma_2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1,\\ \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = -6;\end{cases} \quad \begin{cases}\sigma_1 = 6,\\ \sigma_2 = -3,\\ -6 - 3\sigma_3 = -6;\end{cases} \quad \begin{cases}\sigma_1 = 6,\\ \sigma_2 = -3,\\ \sigma_3 = 0.\end{cases}$$

Значения x, y и z должны быть корнями многочлена $t^3 - 2t^2 - 3t = t(t^2 - 2t - 3) \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -1,\ t_3 = 3.$

Ответ: $(-1; 0; 3),\ (-1; 3; 0),\ (0; -1; 3),\ (0; 3; -1),\ (3; -1; 0),$ $(3; 0; -1)$.

Пример 29.

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 = 12,\\ xy + yx + xz = 12.\end{cases}$$

Решение. Вычтем из левой части первого уравнения левую часть второго, соответственно – из правой правую.

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - xy + yx + xz = 0,\\ xy + yx + xz = 12.\end{cases}$$

Умножим левую и правую части первого уравнения на 2. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yx + 2xz = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$. Подставив в уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ переменную x вместо y и z, получим: $3x^2 - 12 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ответ: $(2; 2; 2)$, $(-2; -2; -2)$.

Пример 30. Решить систему уравнений с параметром a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Обратимся к формулам (6) на с. 56.

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_3 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = \frac{4-a}{2}, \\ \sigma_3 = 4 - a. \end{cases}$$

$t^3 - 2t^2 + \frac{4-a}{2}t - (4-a) = 0 \Rightarrow (t-2)\left(t^2 + \frac{4-a}{2}\right) = 0$. Все корни будут вещественными только при $\frac{4-a}{2} \le 0$, т. е. при $a \ge 4$: $t_1 = 2,\ t_2 = -\sqrt{\frac{a-4}{2}},\ t_3 = \sqrt{\frac{a-4}{2}}$.

Ответ: при $a < 4$ система не имеет решений,

при $a = 4 : (2; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 2)$,

при $a > 4$: $\left(2; -\sqrt{\frac{a-4}{2}}; \sqrt{\frac{a-4}{2}}\right)$, $\left(2; \sqrt{\frac{a-4}{2}}; -\sqrt{\frac{a-4}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{a-4}{2}}; 2; \sqrt{\frac{a-4}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{a-4}{2}}; 2; -\sqrt{\frac{a-4}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{a-4}{2}}; \sqrt{\frac{a-4}{2}}; 2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{a-4}{2}}; -\sqrt{\frac{a-4}{2}}; 2\right)$.

Следующие три примера рассчитаны на «продвинутого» старшеклассника, дружащего с комплексными числами и производными.

Пример 31. Определить, при каких значениях параметров a и b система имеет ровно одно вещественное решение и найти это решение.

$$\begin{cases} x + y + z = 3a, \\ xy + xz + yz = 3b, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим многочлен

$$f(t) = t^3 - 3at^2 + 3bt - 1. \tag{8}$$

Из теории известно, что многочлен 3-й степени может иметь один или три вещественных корня. Если вещественный корень один (два других комплексные), то система не имеет вещественных решений. Если многочлен имеет три вещественных корня: t_1, t_2 и t_3, то решениями исходной системы уравнений будут тройки $(x; y; z)$, полученные из всех возможных перестановок t_1, t_2 и t_3. В частности, если мы имеем три различных корня, система будет иметь $3! =$ 6 решений. Одно решение возможно только тогда, когда все три корня совпадают, т. е. многочлен можно представить в виде

$$f(t) = (t-c)^3 = t^3 - 3ct^2 + 3c^2t - c^3. \tag{9}$$

Приравняем коэффициеты в правых частях уравнений 8 и 9:

$$\begin{cases} -3a = -3c, \\ 3b = 3c^2 \\ -c^3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $a = 1$, $b = 1$ и $t_1 = t_2 = t_3 = 1$. $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$. График функции $f(t)$ представлен на рис. 7.

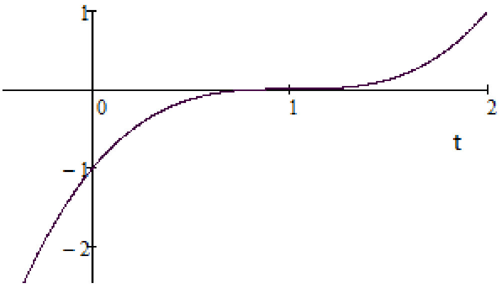

Рис. 7. График многочлена $f(t)$

Ответ. Только при условии $(a = 1)\&(b = 1)$ система имеет ровно одно решение: $x = y = z = 1$.

А что если задать возмущение одного из параметров, т. е. изменить его на небольшую величину? Например, пусть $b = 1.001$. Построим график уравнения с возмущенным параметром: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3 \cdot 1.001t - 1$. Окажется, что он визуально неотличим от изображенного на рис. 7 и также пересекает ось абсцисс только в одной точке. Может, и в этом случае у системы будет единственное решение? Нет! Многочлен с возмущенным коэффициентом имеет один вещественный и два комплексных корня. При любом малом возмущении параметров a и b появляются комплексные корни, и потому система не имеет вещественного решения.

Пример 32. Определить, при каких значениях параметра a система не имеет вещественных решений; имеет ровно три; ровно шесть вещественных решений.

$$\begin{cases} x + y + z = -\frac{3}{2}, \\ xy + xz + yz = -6, \\ xyz = a. \end{cases}$$

Решение. Решениями системы уравнений будут все вещественные тройки чисел $(x; y; z)$, являющиеся корнями многочлена $f(t) = t^3+\frac{3}{2}t^2-6t-a$. Определим вспомогательный многочлен $\varphi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t$. Его график представлен на рис. 8. Очевидно, $f(t) = \varphi(t) - a$.

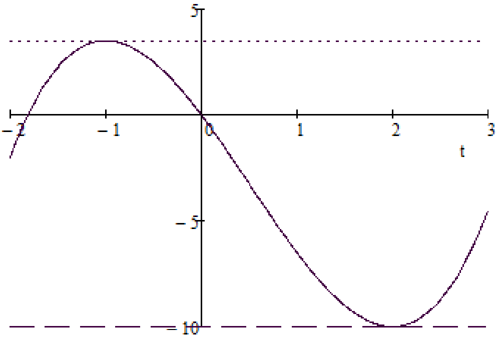

Рис. 8. График многочлена $\varphi(t)$

Производная $\varphi'(t) = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t-2)(t+1)$. Отсюда $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ – область возрастания функции; $(-1;2)$ – область убывания функции; (-1) – точка максимума; 2 – точка минимума. График $f(t)$ получается смещением графика $\varphi(t)$ вверх или вниз в зависимости от знака a. На рис. 9а показан график функции $\varphi(t) - 3.5$, а на рис. 9б – график функции $\varphi(t) + 10$. Графики соответствуют случаям, когда $f(t)$ имеет три вещественных корня, два из которых кратны (при $a = 3.5$ или $a = -10$). Тогда при $a \in (-10; 3.5)$ ось Ox пересечет график функции в трех точках – три различных корня, а при $a \in (-\infty;-10) \cup (3.5;+\infty)$ – только один вещественный корень. Теперь мы можем сформулировать ответ.

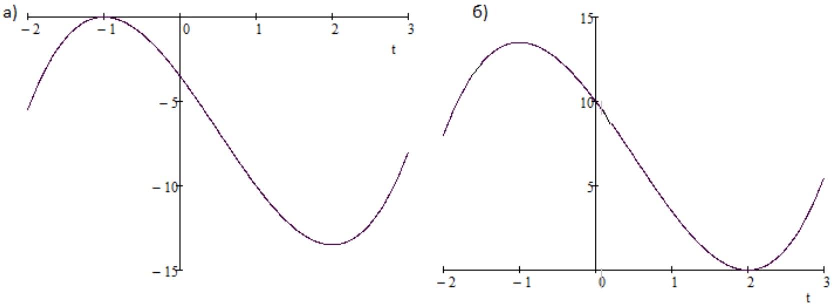

Рис. 9. Графики многочленов: а) $\varphi(t) - 3.5$; б) $\varphi(t) + 10$

Ответ: при $a \in (-\infty; -10) \cup (3.5; +\infty)$ система не имеет вещественных решений; при $a = 3.5$ и $a = -10$ имеет ровно три вещественных решения; при $a \in (-10; 3.5)$ – ровно шесть.

Пример 33. При каких значениях параметра a система имеет ровно одно решение?

$$\begin{cases} x + y + z = 3a, \\ xy + xz + yz = 6a, \\ xyz = 4a. \end{cases}$$

Решение. Решение будет единственным, если все три корня многочлена $t^3 - 3at^2 + 6at - 4a$ совпадают. В таком случае многочлен можно представить в виде $(t-p)^3 = t^3 - 3pt^2 + 3p^2t - p^3$. Приравняв коэффициенты многочленов, получим:

$$\begin{cases} 3p = 3a, \\ 3p^2 = 6a, \\ p^3 = 4a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = a, \\ a^2 = 2a, \\ a^3 = 4a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = a, \\ a(a-2) = 0, \\ a(a-2)(a+2) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, возможны два случая: при $a = 0$ существует единственное решение $(0;0;0)$ и при $a = 2$ – $(2;2;2)$.

Ответ: $a = 0$ и $a = 2$.

Теорему Виета можно обобщить на многочлены любой степени. Так, для корней многочлена четвертой степени

$$x^4 + px^3 + rx^2 + sx + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

имеют место равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = r, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -s, \\ x_1x_2x_3x_4 = q. \end{cases}$$

Предоставляем читателю возможность самому определить принцип построения таких систем уравнений.

3.2. Задачи

$\boxed{54 \Leftrightarrow 72}$

149. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$

150. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ xy+xz+yz=-1, \\ xyz=-4. \end{cases}$

151. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+xz+yz=-7, \\ xyz=6. \end{cases}$

152. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-9, \\ xyz=-18. \end{cases}$

153. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-22, \\ xyz=-40. \end{cases}$

154. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+xz+yz=-6, \\ xyz=-8. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2}, \\ x+y+z=\dfrac{7}{2}, \\ xyz=1. \end{cases}$

156. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

157. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

158. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ xyz=1. \end{cases}$

159. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=-1. \end{cases}$ **160.** $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3, \\ xyz=2. \end{cases}$

161. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ xy+xz+yz=0, \\ x^4+y^4+z^4=81. \end{cases}$ **162.** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ xy+xz+yz=-1, \\ xyz=0. \end{cases}$

163. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2=6, \\ xyz=1. \end{cases}$

164. $\begin{cases} x-2y+3z=3, \\ -2xy+3xz-6yz=3, \\ xyz=-\frac{1}{6}. \end{cases}$

Ответы

$\boxed{70 \Leftrightarrow 76}$

§ 1. Системы двух уравнений

1. $(-2;-5)$ и $(-5;-2)$. **2.** $(1;2)$ и $(2;1)$. **3.** $(2;6)$ и $(6;2)$. **4.** $(-1;-2)$ и $(-2;-1)$. **5.** Решений нет. **6.** $(2;-1)$ и $(-1;2)$. **7.** $(-4;3)$ и $(3;-4)$. **8.** $(-7;2)$ и $(2;-7)$. **9.** $(7;-3)$ и $(-3;7)$. **10.** $(-6;2)$ и $(2;-6)$. **11.** $(3;6)$ и $(6;3)$. **12.** $(-9;5)$ и $(5;-9)$. **13.** $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$ и $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$. **14.** $(1;\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};1)$. **15.** $(-1+\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3})$ и $(-1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3})$. **16.** $(\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{3-\sqrt{13}}{2})$. **17.** $(\sqrt{2};\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\sqrt{2})$. **18.** $(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2})$. **19.** Решений нет. **20.** $(1;3)$ и $(3;1)$. **21.** $(-2;1)$, $(1;-2)$, $(-1;2)$, $(2;-1)$. **22.** $(3;4)$ и $(4;3)$. **23.** Решений нет. **24.** $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$. **25.** $(1;10)$ и $(10;1)$. **26.** $(2;-2)$ и $(-2;2)$. **27.** $(1;2)$ и $(2;1)$. **28.** $(2;3)$ и $(3;2)$. **29.** $(4-\sqrt{21};\ 4+\sqrt{21})$, $(4+\sqrt{21};\ 4-\sqrt{21})$, $(-4-\sqrt{21};\ -4+\sqrt{21})$, $(-4+\sqrt{21};\ -4-\sqrt{21})$. **30.** $(4;5)$, $(5;4)$. **31.** Решений нет. **32.** $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$. **33.** $(1;7)$, $(7;1)$, $(-1;-7)$, $(-7;-1)$. **34.** $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$. **35.** $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$. **36.** $(2;5)$, $(5;2)$. **37.** $(2;6)$, $(6;2)$. **38.** $(\frac{-9-\sqrt{21}}{2}; \frac{-9+\sqrt{21}}{2})$, $(\frac{-9+\sqrt{21}}{2}; \frac{-9-\sqrt{21}}{2})$, $(3;5)$, $(5;3)$. **39.** $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$. **40.** $(1;2)$, $(2;1)$. **41.** $(1;3)$, $(3;1)$.

42. Решений нет. **43.** $(1;6)$, $(6;1)$. **44.** $(1;1)$, $(\frac{4-\sqrt{14}}{2}; \frac{4+\sqrt{14}}{2})$, $(\frac{4+\sqrt{14}}{2}; \frac{4-\sqrt{14}}{2})$. **45.** $(2;2)$. **46.** $(-1;2)$, $(2;-1)$. **47.** $(-1;2)$, $(2;-1)$, $(5;5)$. **48.** $(1;1)$, $(\frac{-3-2\sqrt{21}}{11};\frac{-3+2\sqrt{21}}{11})$, $(\frac{-3+2\sqrt{21}}{11};\frac{-3-2\sqrt{21}}{11})$. **49.** $(1;1)$. **50.** $(\frac{-9-\sqrt{309}}{12}; \frac{-9+\sqrt{309}}{12})$, $(\frac{-9+\sqrt{309}}{12}; \frac{-9-\sqrt{309}}{12})$, $(2;3)$, $(3;2)$. **51.** $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$. **52.** $(2;5)$, $(5;2)$. **53.** $(1;3)$, $(3;1)$. **54.** $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$. **55.** $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$. **56.** $(\frac{\sqrt{33}-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{33}+\sqrt{17}}{2})$, $(\frac{\sqrt{33}+\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{33}-\sqrt{17}}{2})$,$(\frac{-\sqrt{33}-\sqrt{17}}{2};\frac{-\sqrt{33}+\sqrt{17}}{2})$,$(\frac{-\sqrt{33}+\sqrt{17}}{2}; \frac{-\sqrt{33}-\sqrt{17}}{2})$. **57.** $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$. **58.** $(1;1)$, $(-1;-1)$. **59.** $(1;2)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$, $(-1;-2)$, $(2;1)$, $(-2;1)$, $(2;-1)$, $(-2;-1)$. **60.** $(3;-2)$, $(-2;3)$. **61.** $(1;1)$. **62.** $(3;6)$, $(6;3)$. **63.** $(-2;1)$, $(1;-2)$. **64.** $(2;6)$, $(6;2)$. **65.** $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$. **66.** Решений нет. **67.** $(2;3)$, $(3;2)$. **68.** $(2;3)$, $(3;2)$. **69.** $(1;4)$, $(4;1)$, $(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2})$, $(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2})$. **70.** Решений нет. **71.** $(2;2)$. **72.** $(1;7),(7;1)$. **73.** $(4;12)$, $(12;4)$, $(-5-\sqrt{55};-5+\sqrt{55})$, $(-5+\sqrt{55};-5-\sqrt{55})$. **74.** $(1;2)$, $(2;1)$. **75.** $(-1;2)$, $(2;-1)$. **76.** $(2;5)$,$(5;2)$,$(-2;-5)$, $(-5;-2)$. **77.** $(-1;2)$, $(2;-1)$. **78.** $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{10}; \frac{1}{15})$, $(\frac{1}{15}; -\frac{1}{10})$. **79.** $(3;5)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$, $(-5;-3)$. **80.** $(2;3)$,$(3;2)$, $(\frac{2}{5}; -\frac{3}{5})$, $(-\frac{3}{5}; \frac{2}{5})$. **81.** $(2; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(-2; -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; -2)$. **82.** $(1;1)$, $(\frac{-4-3\sqrt{2}}{2}; \frac{-4+3\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}; \frac{-4-3\sqrt{2}}{2})$. **83.** $(2;4)$, $(4;2)$, $(-2;-4)$, $(-4;-2)$. **84.** $(-3\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 3\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $(3\frac{\sqrt{5}-1}{2}; -3\frac{\sqrt{5}+1}{2})$, $(6;6)$. **85.** $(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$, $(-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2})$, $(1;1)$. **86.** $(1;4)$, $(4;1)$. **87.** $(-1;-1)$, $(2;-1)$, $(-1;2)$. **88.** $(1;1)$,

$(-1;-1)$. **89.** $(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{10}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{2})$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(-1;-2)$, $(-2;-1)$. **90.** $(3;12)$, $(12;3)$. **91.** $(6;8)$, $(8;6)$. **92.** $(1;9)$, $(9;1)$. **93.** $(4;9)$, $(9;4)$. **94.** $(2;8)$, $(8;2)$. **95.** $(16;25)$, $(25;16)$.

§ 2. Симметрия относительно выражений

96. $(2;1)$, $(5;\frac{2}{5})$. **97.** $(2;3)$, $(-\frac{12}{7};-\frac{7}{2})$. **98.** $(3;2)$, $(-5;-\frac{6}{5})$. **99.** $(5;1)$, $(-\frac{7}{3};-\frac{15}{7})$. **100.** $(1;-10)$, $(-2;5)$. **101.** $(4;5)$, $(-2;-10)$. **102.** $(3;10)$, $(-\frac{30}{11};-11)$. **103.** $(8;9)$, $(\frac{27}{2};\frac{16}{3})$. **104.** $(-3;-5)$, $(4;\frac{15}{4})$. **105.** $(-2;2)$, $(\frac{8}{3};-\frac{3}{2})$. **106.** $(6;1)$, $(-7;-\frac{6}{7})$. **107.** $(-6;2)$, $(5;-\frac{12}{5})$. **108.** Решений нет. **109.** $(\frac{5-3\sqrt{5}}{2};\frac{-5-3\sqrt{5}}{5})$, $(\frac{5+3\sqrt{5}}{2};\frac{-5+3\sqrt{5}}{5})$. **110.** $(\frac{4-\sqrt{22}}{3};-4-\sqrt{22})$, $(\frac{4+\sqrt{22}}{3};-4+\sqrt{22})$. **111.** $(\frac{10-\sqrt{114}}{7};\frac{10+\sqrt{114}}{2})$, $(\frac{10+\sqrt{114}}{7};\frac{10-\sqrt{114}}{2})$. **112.** Решений нет. **113.** $(\frac{13-\sqrt{73}}{4};\frac{13+\sqrt{73}}{12})$, $(\frac{13+\sqrt{73}}{4};\frac{13-\sqrt{73}}{12})$. **114.** Решений нет. **115.** $(\frac{-7-2\sqrt{21}}{7};\frac{7-2\sqrt{21}}{5})$, $(\frac{-7+2\sqrt{21}}{7};\frac{7+2\sqrt{21}}{5})$. **116.** $(-3-\sqrt{3};\frac{-3+\sqrt{3}}{2})$, $(-3+\sqrt{3};\frac{-3-\sqrt{3}}{2})$. **117.** $(2;3)$, $(4;1)$. **118.** $(-3;0)$, $(3;-6)$. **119.** $(0;7)$, $(2;5)$. **120.** $(1;3)$, $(3;1)$. **121.** $(-1;-6)$, $(-2;-5)$. **122.** $(1;1)$, $(-7;9)$. **123.** $(10;10)$, $(16;4)$. **124.** $(-8;-4)$. **125.** $(0;5)$, $(6;-1)$. **126.** $(2;5)$, $(3;4)$. **127.** Решений нет. **128.** $(5-\sqrt{47};3+\sqrt{47})$, $(5+\sqrt{47};3-\sqrt{47})$. **129.** Решений нет. **130.** $(-\sqrt{23};1+\sqrt{23})$, $(\sqrt{23};1-\sqrt{23})$. **131.** $(7;-4)$. **132.** $(\frac{3-\sqrt{37}}{2};\frac{1+\sqrt{37}}{2})$, $(\frac{3+\sqrt{37}}{2};\frac{1-\sqrt{37}}{2})$. **133.** $(1;2)$, $(\frac{5}{2};1)$. **134.** $(-3,2;-18)$, $(1;3)$. **135.** $(-1;-1)$, $(\frac{19}{3};-\frac{13}{2})$. **136.** $(8;1)$, $(16;\frac{15}{7})$. **137.** $(-1;1)$, $(-\frac{13}{3};11)$. **138.** $(2;1)$,

$(-18; -7)$. **139.** $\left(\frac{-15-\sqrt{673}}{4}; \frac{-55-\sqrt{673}}{6}\right)$, $\left(\frac{-15+\sqrt{673}}{4}; \frac{-55+\sqrt{673}}{6}\right)$. **140.** Решений нет. **141.** $\left(\frac{-1-\sqrt{2549}}{14}; \frac{-7-\sqrt{2549}}{10}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{2549}}{14}; \frac{-7+\sqrt{2549}}{10}\right)$. **142.** $(-\frac{3}{2}; -1)$, $(2; 6)$. **143.** $(2; 2)$, $(13; -9)$. **144.** $(3; -5)$, $(-4; 2)$. **145.** $(2; 6)$, $(10; -2)$. **146.** $(-14; 13)$, $(2; -3)$. **147.** $(2; 3)$, $(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$. **148.** $(-2; -2)$, $(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3})$.

§ 3. Системы трех уравнений

149. $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$, $(3; 2; 1)$. **150.** $(-1; 1; 4)$, $(-1; 4; 1)$, $(1; -1; 4)$, $(1; 4; -1)$, $(4; -1; 1)$, $(4; 1; -1)$. **151.** $(-2; -1; 3)$, $(-2; 3; -1)$, $(-1; -2; 3)$, $(-1; 3; -2)$, $(3; -2; -1)$, $(3; -1; -2)$. **152.** $(-3; 2; 3)$, $(-3; 3; 2)$, $(2; -3; 3)$, $(2; 3; -3)$, $(3; -3; 2)$, $(3; 2; -3)$. **153.** $(-5; 2; 4)$, $(-5; 4; 2)$, $(2; -5; 4)$, $(2; 4; -5)$, $(4; -5; 2)$, $(4; 2; -5)$. **154.** $(-2; 1; 4)$, $(-2; 4; 1)$, $(1; -2; 4)$, $(1; 4; -2)$, $(4; -2; 1)$, $(4; 1; -2)$. **155.** $(\frac{1}{2}; 1; 2)$, $(\frac{1}{2}; 2; 1)$, $(1; \frac{1}{2}; 2)$, $(2; \frac{1}{2}; 1)$, $(1; 2; \frac{1}{2})$, $(2; 1; \frac{1}{2})$. **156.** $(-2; 1; 2)$, $(-2; 2; 1)$, $(1; -2; 2)$, $(1; 2; -2)$, $(2; -2; 1)$, $(2; 1; -2)$. **157.** $(-1; 1; 2)$, $(-1; 2; 1)$, $(1; -1; 2)$, $(1; 2; -1)$, $(2; -1; 1)$, $(2; 1; -1)$. **158.** $(1; 1; 1)$. **159.** $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; 1; -1)$. **160.** $(-1; -1; 2)$, $(-1; 2; -1)$, $(2; -1; -1)$. **161.** $(0; 0; 3)$, $(0; 3; 0)$, $(3; 0; 0)$, $(0; 0; -3)$, $(0; -3; 0)$, $(-3; 0; 0)$. **162.** $(-1; 0; 1)$, $(-1; 1; 0)$, $(0; -1; 1)$, $(0; 1; -1)$, $(1; -1; 0)$, $(1; 0; -1)$. **163.** $(1; 1; 1)$. **164.** $(1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

Биографические справки

$\boxed{72 \Leftrightarrow 89}$

Азаров Алексей Иванович (1951) – советский и белорусский математик, доцент Белорусского государственного университета. Родился в г. Суздале в семье военнослужащего. В 1973 г. окончил факультет прикладной математики БГУ. Автор ряда учебных пособий для школьников и абитуриентов [19].

Алимов Шавкат Арифджанович (1945) – советский и узбекский математик, доктор физико-математических наук, профессор Ташкентского государственного университета, академик АН Узбекистана. В 1968 г. окончил физический факультет МГУ. Автор учебника алгебры [2].

Ашкинузе Владимир Георгиевич (1927) – советский математик и педагог, соавтор учебника [7].

Барвенов Сергей Александрович – советский и белорусский математик, доцент БГУ, автор ряда учебных пособий по математике для абитуриентов [19].

Болтянский Владимир Григорьевич (1925–2019) – советский и российский математик, доктор физико-математических наук, профессор МГУ, член-корреспондент АПН СССР и РАО, ветеран Великой Отечественной войны. Родился в Москве в семье историка кино Григория Моисеевича Болтянского. В 1948 г. окончил механико-математический факультет МГУ. Работал над теорией отечественного школьного образования. Автор ряда учебных пособий, в том числе [7].

Бунимович Евгений Абрамович (1954) – советский и российский математик-педагог, главный редактор научно-методических журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников». Родился в семье профессора МГУ Бунимовича Абрама Исааковича. В 1975 г. окончил механико-математический факультет МГУ. С 1976 по 2007 г. работал учителем математики. Автор учебников и учебных пособий по математике для 5–9 классов [3].

Вальцов Николай Константинович (1858–1900) – российский математик-педагог, преподаватель математики и физики Коломенской гимназии. Родился в селе Троицко-Борском Ярославской губернии в семье пристава. В 1881 г. окончил физико-математический факультет Императорского Московского университета. Один из авторов задачника [20].

Виленкин Наум Яковлевич (1920–1991) – советский математик, доктор физико-математических наук, профессор Московского заочного педагогического института, популяризатор математики, автор школьных учебников по математике [8], [7]. В 1942 г. окончил МГУ.

Винберг Эрнест Борисович (1937) – советский и российский математик, профессор МГУ. Родился в семье инженера завода «Динамо». В 1959 г. окончил механико-математический факультет МГУ. Автор книги [9].

Гутер Рафаил Самойлович (1920—1978) – советский математик, соавтор школьного учебника алгебры [8], автор популярных книг для школьников.

Дорофеев Георгий Владимирович (1938–2008) – советский и российский математик, доктор физико-математических наук, профессор, автор ряда известных учебников и учебных пособий по математике [3].

Звавич Леонид Исаакович (1945) – советский и российский математик-педагог, автор более ста книг и статей по вопросам школьной математики, педагогики и психологии, в том числе широко известного задачника по алгебре [10]. Родился в семье советского историка-англоведа Звавича Исаака Семеновича. В 1969 г. окончил МГПИ им. В. И. Ленина.

Киселев Андрей Петрович (1852–1940) – русский и советский педагог, талантливый учитель математики, автор учебников для средних школ и реальных училищ, которые охватили все дисциплины школьной математики и успешно работали в отечественной школе свыше 65 лет [11]. Родился в бедной мещанской семье Мценского уезда Орловской губернии. В 1987 г. окончил физико-математический факультет Петербургского университета. Преподавал математику, механику и черчение в Воронежском реальном училище, затем в Курской мужской гимназии и, наконец, в Воронежском кадетском корпусе (1892—1901). В 1901 г. вышел в отставку и занялся литературной работой. После революции (1918–1921) преподавал математику в Воронежском институте народного образования, на педагогических курсах, высших командных курсах. С 1922 г. жил и работал в Ленинграде.

Колягин Юрий Михайлович (1927–2016) – российский математик-педагог, член-корреспондент АПН СССР, академик РАО. Окончил физико-математический факультет Московского областного педагогического института. Один из авторов программ и учебников математики для средней школы, учащихся техникумов, студентов педагогических институтов и учителей [2].

Кочетков Евгений Семенович – автор учебника алгебры для старших классов средней школы [12].

Кочеткова Екатерина Семеновна – автор учебника алгебры для старших классов средней школы [12].

Кузнецова Людмила Викторовна – российский математик-методист, автор учебников, учебных пособий и задачников для учащихся 5–9 классов, в том числе [3].

Работала в лаборатории математического образования Института содержания и методов обучения Российской академии образования.

Курош Александр Геннадиевич (1908–1971) – выдающийся советский математик, доктор физико-математических наук, профессор МГУ. Родился в фабричном поселке Ярцево Смоленской губернии в семье конторщика хлопчатобумажной фабрики. В годы революции и Гражданской войны вынужден был совмещать учебу в школе с работой. В 1924 г. поступил на физико-техническое отделение педагогического факультета Смоленского университета, стал учеником Павла Сергеевича Александрова, читавшего в этом университете лекции по ряду математических дисциплин. После окончания университета с 1930 г. и до последних дней жизни преподавал в МГУ. С 1949 г. заведовал кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета. Автор учебника «Курс высшей алгебры» [13], на котором выросло несколько поколений отечественных физиков, математиков и инженеров.

Ларичев Павел Афанасьевич (1892–1963) – советский математик-педагог и методист, автор школьного задачника по алгебре [14].

Литвиненко Виктор Николаевич (1923) – советский и российский математик, профессор, ветеран Великой Отечественной войны. Окончил физико-математический факультет Кировского педагогического университета. Автор учебных пособий по алгебре и геометрии для учащихся средней школы и студентов педагогических факультетов, в частности [15].

Макарычев Юрий Николаевич (1922–2007) – советский и российский математик, ветеран Великой Отечественной войны. С 1951 по 1961 г. работал в школе № 578 г. Москвы. Руководитель авторских коллективов, подготовивших учебники алгебры для 7, 8 и 9-го классов под редакцией Алексея Михайловича Маркушевича, а затем Сергея Александровича Теляковского. Автор учебников алгебры для учащихся 7–9-х классов с углубленным изучением математики [4], автор книги «Система изучения элементарных функций в старших классах средней школы», один из авторов серии книг «Математика в начальной школе».

Маркушевич Алексей Иванович (1908–1979) – советский математик и педагог, член-корреспондент АПН, автор работ по теории функций, методике преподавания и истории математики. Родился в г. Петрозаводске в семье младшего архитектора губернского правления. В 1930 г.

окончил физико-математическое отделение Среднеазиатского университета в г. Ташкенте. В 1960-х г. принимал активное участие в создании новых школьных учебников по математике [4].

Мерзляк Аркадий Григорьевич – советский и украинский математик, учитель математики Киево-Печерского лицея, автор книг и учебников по математике [16].

Минаева Светлана Станиславовна – ведущий научный сотрудник Института содержания и методов обучения РАО, автор научных статей, методических разработок и учебников [3].

Миндюк Нора Григорьевна (1933–2016) – советский и российский математик-педагог, популяризатор новых математических идей. Родилась в семье известного математика, профессора МГПИ Григория Борисовича Гуревича. Окончила Московский городской педагогический институт им. В. П. Потемкина. Несколько лет работала учителем математики в одной из школ г. Москвы, затем обучалась в аспирантуре при секторе математики Института методов обучения АПН СССР (1961–1964), с 1966 г. стала сотрудником института. В 1960-е годы вошла в авторский коллектив по разработке новых учебников алгебры под руководством Юрия Николаевича Макарычева и редакцией Алексея Ивановича Маркушевича [4].

Мишустина Татьяна Николаевна – соавтор ряда учебников по алгебре для учащихся 8–11 классов [18].

Моденов Владимир Павлович (1938) – профессор МГУ, автор более 180 научных и свыше 40 учебно-методических работ, в том числе учебных пособий для абитуриентов [17].

Мордкович Александр Григорьевич (1940) – заслуженный деятель науки РФ, профессор МГПУ, автор учебников и учебных пособий по математике для «школьников» и студентов педагогических институтов [18], [15].

Нешков Константин Иванович (1923–2011) – советский и российский педагог-методист, автор школьных учебников по математике [4].

Никольский Сергей Михайлович (1905–2012) – советский и российский математик, профессор МФТИ, академик РАН. Родился в Пермской губернии в семье лесника и сельской учительницы. В 1929 г. окончил Екатеринославский институт народного образования. В дальнейшем, работая в том же институте, стал учеником Андрея Николаевича Колмогорова, регулярно приезжавшего в Днепропетровск для чтения лекций. Никольскому принадлежат фундаментальные результаты в области функционального анализа. Автор учебников арифметики и алгебры [1].

Овчинников Борис Владимирович – соавтор учебника алгебры [8].

Полонский Виталий Борисович – советский и украинский математик, учитель математики Киево-Печерского лицея, автор книг и учебников по математике [16].

Потапов Михаил Константинович (р. 1931) – советский и российский педагог-математик, профессор МГУ, соавтор учебных пособий для абитуриентов, научно-популярных книг по математике и школьных учебников по алгебре [1] и началам математического анализа.

Решетников Николай Николаевич – соавтор учебников алгебры для учащихся 5–11 классов [1].

Рослова Лариса Олеговна – российский математик-методист. В 1984 г. окончила факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, работала учителем математики и параллельно в лаборатории обучения математике РАО. В начале 1990-х в составе авторского коллектива трудилась над созданием новых учебников и учебных пособий для «школьников» [3].

Рязановский Андрей Рафаилович (1945) – советский и российский математик-педагог, доцент МГПИ, учитель математики московской школы № 179, лицея ВШЭ и Филлиповской школы. Родился в семье военнослужащего. Окончил механико-математический факультет МГУ.

Соавтор ряда учебников по алгебре и геометрии для учащихся 8–11 классов [10].

Семенов Павел Владимирович (1952) – советский и российский математик, профессор факультета математики НИУ ВШЭ. В 1976 г. окончил МГПИ им. В. И. Ленина. Соавтор учебников алгебры для учащихся 9–10 классов [10].

Сидоров Юрий Викторович (1932–2002) – советский и российский математик, преподаватель МФТИ, автор ряда школьных учебников [2].

Суворова Светлана Борисовна – соавтор ряда школьных учебников по алгебре [3].

Теляковский Сергей Александрович (1932) – российский математик, доктор физико-математических наук, редактор учебников по алгебре для учащихся 7, 8 и 9-го [4] классов. Родился в семье инженера Саратовского завода комбайнов. Отец репрессирован в 1938 г. В 1955 г. окончил механико-математический факультет Саратовского университета, а в 1958 г. аспирантуру МИАН (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН). С 1958 г. работал в МИАН.

Ткачева Мария Владимировна – доктор педагогических наук, профессор. Автор школьных учебников по математике [2].

Тульчинская Елена Ефимовна – учитель математики школы № 1504 г. Москвы, соавтор учебников по математике [18].

Федорова Надежда Евгеньевна – математик, доцент. В 1969 г. окончила МГПИ им. В. И. Ленина. Работала учителем математики в школах г. Москвы, участвовала в создании учебников математики для средней школы [2].

Федосенко Василий Степанович (1944–2002) – советский и белорусский математик, профессор БГУ. Родился в деревне Нырки Могилевской области в крестьянской семье. В 1960 г. пытался поступить в МГУ, но не прошел по конкурсу. В приемной комиссии предложили способному абитуриенту без экзаменов пойти на физико-математический факультет Петрозаводского госуниверситета с условием, что при успешной учебе он впоследствии сможет перевестись на математический факультет МГУ. Отучившись четыре семестра «на отлично», Федосенко подал документы на перевод, но оказалось, что в МГУ не могут предоставить ему места в общежитии, а другого жилья в Москве найти не удалось. Василий Степанович вернулся на родину в Беларусь и с 1962 по 1965 г. обучался на математическом факультете БГУ. Помимо научной работы по теме кафедры, Василий Степанович находил время для работы над учебными пособиями по математике для школьников и абитуриентов [19].

Шабунин Михаил Иванович (1930–2017) – советский и российский математик, профессор МФТИ. Соавтор учебника [2].

Шапошников Николай Александрович (1851–1920) – русский математик, крупнейший методист-преподаватель, автор учебников для средней и высшей школы [20]. Родился в семье чиновника губернской палаты. В 1873 г. окончил Имперский Московский университет.

Шварцбурд Семен Исаакович (1918–1996) – советский математик-педагог, доктор педагогических наук, профессор, член-корреспондент АПН СССР, автор многочисленных работ в области педагогики и методики обучения, а также учебников и методических пособий для учителей и учащихся [8].

Шевкин Александр Владимирович (1951) – российский математик-педагог. Окончил математический факультет Московского областного педагогического института им. Н. К. Крупской. С 1976 по 2007 г. работал в школе № 679 г. Москвы, с 1984 по 1999 г. – в Институте общего среднего образования Российской академии образования. С 2007 г. – учитель математики школы № 2007 г. Москвы. В 1985 г. вошел в состав авторского коллектива под руководством Сергея Михайловича Никольского, работающего над учебниками серии «МГУ – школе»: «Арифметика. 5–6», «Алгебра. 7–9» [1] и «Алгебра и начала анализа. 10–11».

Шибут Александр Степанович (1957–2019) – советский и белорусский математик, старший преподаватель БГУ, автор учебных пособий для школьников и абитуриентов [19].

Якир Михаил Семенович (1958) – советский и украинский математик и педагог. В 1979 г. окончил Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького. С 1992 по 2017 г. преподавал в Киево-Печерском лицее № 171. Автор более двадцати учебников по математике [16].

⇐ 76

Список литературы

[1] Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.]. – Москва : Просвещение, 2014. – 301 с.

[2] Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. – Москва : Просвещение, 2012. – 287 с.

[3] Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев [и др.]. – Москва : Просвещение, 2016. – 336 с.

[4] Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.]. – Москва : Просвещение, 2014. – 271 с.

[5] Барсуков, А. Н. Сборник задач по алгебре для педагогических училищ / А. Н. Барсуков. – Свердловск : Учпедгиз, 1948. – 164 с.

[6] Барсуков, А. Н. Алгебра. Учебник для 6–8 классов / А. Н. Барсуков. – Москва : Просвещение, 1966. – 296 с.

[7] Болтянский, В. Г. Симметрия в алгебре / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. – Москва : НЦНМО, 2002. – 240 с.

[8] Виленкин, Н. Я. Алгебра. Учебное пособие для IX и X классов средних школ с математической специализацией / Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбург. – Москва : Просвещение, 1968. – 336 с.

[9] Винберг, Э. Б. Симметрия многочленов / Э. Б. Винберг. – Москва : МЦНМО, 2001. – 24 с.

[10] Звавич, Л. И. Алгебра. 9 класс : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. – Москва : Мнемозина, 2008. – 336 с.

[11] Киселев, А. Элементы алгебры и анализа : в 2 ч. / А. Киселев. – Москва ; Ленинград : Государственное изд-во, 1928. – Ч. 1. – 314 с.

[12] Кочетков, Е. С. Алгебра и элементарные функции : учебное пособие для учащихся 9 класса средней

школы / Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. – Москва : Просвещение, 1969. – 352 с.

[13] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва : Наука, 1975. – 432 с.

[14] Ларичев, П. А. Сборник задач по алгебре для 8–10 классов средней школы : в 2 ч. / П. А. Ларичев. – Москва : Учебно-педагогическое изд-во, 1953. – Ч. II. – 264 с.

[15] Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1991. – 352 с.

[16] Мерзляк, А. Г. Алгебра : учебник для 9 класса общеобразовательных учебных заведений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2017. – 272 с.

[17] Моденов, В. П. Математика : пособие для поступающих в вузы / В. П. Моденов. – Москва : Новая Волна, 2002. – 800 с.

[18] Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс : задачник для общеобразовательных учреждений : в 2 ч. / А. Г.

Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. – Москва : Мнемозина, 2015. – Ч. 2. – 155 с.

[19] Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи / А. И. Азаров [и др.]. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 288 с.

[20] Шапошников, Н. А. Сборник алгебраических задач для средней школы : в 2 ч. / Н. А. Шапошников, Н. К. Вальцов. – Москва : Учебно-педагогическое изд-во, 1933. – Ч. 2. – 104 с.

Вышли в печать книги
серии «Математика не для ЕГЭ»:

Белый Е. К. **Введение в Microsoft Access.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2020. – 176 с.
Книга позволит получить основные навыки создания баз данных в Microsoft Access.

Белый Е. К. **Символы и их творцы.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2018. – 72 с.
В книге рассказывается о происхождении наиболее известных математических символов. Некоторые из них знакомы нам еще с младших классов. Кажется, что они были всегда, но на самом деле почти все эти символы появились недавно – в течение последних столетий, и их авторы известны.

Белый Е. К. **Вредная геометрия.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2017. – 36 с.
Книга посвящена особому классу геометрических задач, которые называют «софизмами». Суть их в том, что требуется найти ошибку в заведомо ложном доказательстве. Такие задачи наилучшим образом способствуют развитию логического мышления.

Белый Е. К. **Египетский счет.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2017. – 36 с.

В книге в форме рассказа рассмотрены несколько задач на последовательное удвоение чисел.

Белый Е. К. **Прогрессии.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2016. – 132 с.

Первые две главы книги посвящены арифметическим, геометрическим, а также арифметико-геометрическим прогрессиям. В третьей главе дается представление о применении этих прогрессий в финансовых вычислениях.

Белый Е. К., Дорофеева Ю. А. **Алгебраические уравнения.** – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2015. – 240 с.

В пособии собраны наиболее эффективные методы решения алгебраических уравнений и их систем.

Книги можно найти в сети Интернет, в частности на сайте «Учительский портал»: https://www.uchportal.ru/.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Математика не для ЕГЭ

Симметрические уравнения

Учебное пособие для учащихся средних школ

Редактор *Е. Е. Порывакина*

Оформление обложки *Е. Ю. Тихоновой*

Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано в печать 15.02.21. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 200 экз.
Изд. № 9

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33

ISBN: 978-5-8021-3810-6