ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Способы решения задач на оптимизацию производства товаров и услуг

Актуальность темы - эти задачи тесно связаны с практической деятельностью человека. С помощью таких задач можно ответить на вопрос: как добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени.

Гипотеза исследования - общего способа решения экономических задач быть не может, не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать эти задачи.

Цели

- изучить некоторые способы и методы решения задач на оптимизацию производства товаров и услуг
- исследовать вопросы применения этих задач в жизни человека
- повысить уровень математической культуры, прививая себе навыки самостоятельной исследовательской работы в математике
- подготовка к итоговой аттестации ОГЭ и ГИА

I. Введение.

П.Л. Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей. Технологи – стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции. Конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей. Экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т.д. Итак, большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, т.е. оптимального решения поставленной задачи. **Как, располагая определенными ресурсами, добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени** – так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества. Это и определило **актуальность** выбора темы моего доклада. Задачи подобного рода носят общее название – экономические задачи на оптимизацию.

В таких задачах заданы определённые условия производства какой-либо продукции или услуги (это могут быть любые изделия, сельхоз-продукты, полезные ископаемые, транспортные перевозки и т.д. и т.п.) и требуется найти значения некоторых величин с целью максимизации прибыли (как вариант—максимизации количества производимых товаров или услуг) или минимизации расходов. Связи между данными величинами во многих случаях моделируются линейными уравнениями и неравенствами (поэтому эти задачи часто относят к задачам линейного программирования) либо простейшими нелинейными уравнениями и неравенствами. В школьной практике математическая модель (т.е. формализация условия задачи посредством неравенств и уравнений) любой из таких задач обычно приводит к одному-двум линейным уравнениям (неравенствам) относительно двух данных неизвестных и к одному линейному или простейшему нелинейному уравнению, которое связывает данные неизвестные и величину, максимум или минимум которой надо определить. Вводя в качестве новой неизвестной (параметра) эту величину (её обычно называют *целевой функцией*) и выразив одну из данных переменных через другую переменную и введённый параметр, мы получим одно или два линейных уравнения (неравенства), связывающих данные неизвестные (т.е. задающих определённые ограничения на величины этих неизвестных), и одно (возможно, нелинейное) уравнение с параметром. После этого задача сведётся к определению наибольшего (наименьшего) значения параметра, при котором полученное уравнение имеет хотя бы один корень на множестве неотрицательных чисел, удовлетворяющий данным ограничениям. Этот корень будет точкой максимума или минимума целевой функции.

Отметим, что в задачах оптимизации порой используются абстрактные денежные единицы (обозначение: д. е.) Это могут быть рубли, тысячи, миллионы рублей или единиц других валют.

Обратим внимание на одну особенность задач оптимизации. Условия и сюжеты этих задач могут быть очень похожими, различие порой заключается в одном двух числах. При этом уровень сложности и методы решения таких ≪задач-близнецов≫ будут отличаться — и довольно существенно. Примеры, которые будут приведены ниже, в частности, призваны продемонстрировать и эти различия.

II. Экономические задачи на оптимизацию и способы их решения.

1. Логический перебор в задачах оптимизации

Начнём с задач, в которых можно обойтись без исследования целевой функции (а в первом примере даже вовсе не вводить её), решив их с помощью логического перебора. Справедливости ради следует заметить, что таких задач в вариантах ЕГЭ по математике и диагностических работах не так много.

Пример 1. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором - 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га,а на втором—400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу—по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

Решение. Продавать свёклу более выгодно, поэтому второе поле, где её урожайность выше, следует засадить только свёклой. Доход от её продажи составит 10 га · 400 ц/га · 11 000 руб./ц=44 млн руб. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га. Если всё первое поле засеять свёклой, то доход составит 10 га · 300 ц/га · 11 000 = 33 млн руб. Если всё первое поле засеять картофелем, то доход составит 10 га · 400 ц/га · 10 000 = 40 млн руб. Значит, с единицы площади первого поля доход от картофеля будет больше, чем доход от свёклы, поскольку потери от меньшей стоимости компенсируются более высокой урожайностью. Поэтому всё первое поле следует засеять картофелем. Таким образом, наибольший возможный доход фермера равен 44+40=84 млн руб.

Ответ. 84.

2. Линейная целевая функция с целочисленными точками экстремума.

Пример 2. В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. На второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой шахте x рабочих, а во второй шахте y рабочих заняты на добыче алюминия. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество рабочих, чел.	Количество металла за смену, кг	Количество рабочих, чел.	Количество металла за смену, кг
Шахта 1	x	$5x$	$20-x$	$10(20-x)$

Шахта 2	y	$10y$	$100-y$	$5(100-y)$
Всего		$5x+10y$		$700-10x-5y$

Алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, поэтому $5x + 10y = 2(700 - 10x - 5y)$, откуда $5x + 4y = 280$. В силу неотрицательности введённых переменных из условия задачи и последнего равенства следует, что $x <= 20$, $y <= 70$.

Пусть a—масса сплава. По условию она должна быть втрое больше массы добытого никеля, т. е. $a = 3(700 - 10x - 5y)$. Так как $5x=280-4y$, после подстановки этого выражения в выражение $a=3(700-10x-5y)$ и алгебраических преобразований получим, что $a=3(140+3y)$. Поскольку наибольшее возможное значение y равно 70 (при этом $x=0$), наибольшее воз

можное значение $a=3(140+3 \cdot 70)=1050$. Таким образом, 70 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 30 рабочих второй шахты и все 20 рабочих первой шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Ответ. 1050.

3. Нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума

Перейдём к задачам, в которых целевая функция не является линейной. В этих задачах будем использовать свойства квадратичной функции и применять производную для нахождения наибольшего значения.

Пример 3. Геннадий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Геннадий платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе,—200 рублей. Геннадий готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено $x + y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $250x^2 + 200y^2$ рублей. Обозначим $x + y$ через a, т. е. введём параметр (***целевую функцию***).

Таким образом, нужно найти наибольшее значение величины $a= x + y$ при условии $250x^2 + 200y^2 = 900\,000$, откуда $5x^2 + 4y^2 = 18\,000$. Из равенства $a = x + y$ находим $y = a - x$. Тогда $5x^2 + 4(a - x)^2 = 18\,000$, где $x >=0$, $y >=0$, $a>=0$. Требуется найти наибольшее значение a, при котором уравнение $5x^2+4(a- x)^2=18\,000$ имеет хотя бы один неотрицательный корень. Полученное уравнение после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых примет вид $9x^2-8ax +4a^2-18\,000 = 0$. Последнее уравнение является квадратным. Оно имеет хотя бы один корень, только если его дискриминант D неотрицателен, или (что то же), если $D/4>=0$. Поскольку $D/4= 16a^2 -9(4a^2-18\,000) = 9 \cdot 18\,000-20a^2 = 20(8100-a^2)$, из условия неотрицательности дискриминанта получаем неравенство $8100 - a^2>=0$, откуда $a^2 <=8100$, т. е. $|a| <=90$. Значит, искомым наибольшим значением является $a = 90$. В этом случае $D = 0$ и $x =4a/9 =40>0$; $y =a- x=90-40=50>0$.

Ответ. 90.

Для решения следующих двух задач потребуется найти наименьшее значение квадратичной функции (разумеется, это лучше делать без применения производной). Напомним, что оно достигается в точке, которая является абсциссой вершины параболы—графика этой квадратичной функции.

Пример 4. Аглая является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Аглая платит рабочему 500 рублей. Аглае нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено $2x + 5y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2+ y^2)$ рублей. Обозначим $500(x^2 + y^2)$ через a, т.е. введём параметр (*целевую функцию*). Таким образом, нужно найти наименьшее значение функции $a = 500(x^2 + y^2)$ при условии $2x + 5y = 580$, откуда $5y = 580 - 2x$. Тогда $a=500(x^2+ y^2)=20(25x^2+(5y)^2)$. Поэтому

$$a = 20(25x^2+(580-2x)^2) = 20(29x^2-4 \cdot 580x+580^2),$$

где $0<=x<=290$.

Наименьшего значения a достигает в той же точке, в которой достигает наименьшего значения квадратичная функция

$$y = 29x^2-4 \cdot 580x +5802,$$

т. е. в точке $x = x_0=(4 \cdot 580)/(2 \cdot 29) =40$. В этом случае

$a = 20(29 \cdot 402-4 \cdot 580 \cdot 40+5802) = 2000(29 \cdot 16-58 \cdot 16+582) =$

$= 2000(582-29 \cdot 16)=2000(582 -58 \cdot 8) = 2000 \cdot 58 \cdot (58-8) =$

$= 2000 \cdot 58 \cdot 50 = 58 \cdot 100\,000 = 5\,800\,000.$

Ответ. 5,8 млн рублей.__

Пример 5. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2

человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов (в кг) можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов.

За сутки ими будет добыто 160 · 5 · 0,1=80 кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, тогда никель добывают (160–t) рабочих. За сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-t)} = \sqrt{(160-t)} = \sqrt{800-5t}$ кг никеля.

Найдём наибольшее значение функции

$$a(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{800-5t},$$

для натуральных t, не больших 160. Применим производную для исследования функции на максимум.

$$a'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800-5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800-5t}}$$

Найдём неотрицательные нули производной. Для этого достаточно решить уравнение $\sqrt{800-5t} - \sqrt{5t}$, единственным корнем которого является t = 80. При t < 80 производная положительна, а при t > 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума a(80)= $\sqrt{800-5\cdot 80} - \sqrt{5\cdot 80}$=40, который в силу единственности точки экстремума и будет равен наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

III. Заключение.

В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития многих направлений математики. Математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений и, в конечном счете, содействует повышению производительности труда и устойчивому поступательному развитию народного хозяйства.

Решая задачи указанного типа, наблюдаем, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, а с другой – большую эффективную их применимость к решению жизненных практических задач. Такие задачи помогают ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами школьного курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Решение данных экстремальных задач способствовало углублению и обогащению моих математических знаний. Думаю, что эти выводы помогут мне в дальнейшей взрослой жизни, а также определят выбор будущей профессии.

Литература :

1. Гущин Дмитрий Дмитриевич. ВСТРЕЧИ С ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКОЙ Веб-страница :http://reshuege.ru/course?id=2610 Издание 2, дополненное. —Санкт-Петербург 2016.
2. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019. Книга 2: учебно-методическое пособие/ под. ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. Ростов -на-Дону: Легион.
3. http://mathus.ru/ Автор и разработчик сайта — И. В. Яковлев , преподаватель математики и физики.
4. Шестаков С. А. ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко.
5. Электронное издание. М.: МЦНМО, 2018.208 с.
6. Колесникова С.И. Экономические задачи ЕГЭ.–М.:ООО»Азбука -2000», 2016. – (Серия «МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ»).