Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
« Средняя школа №12»

Проектно – исследовательская работа

«Тройственность теоремы Пифагора»

Секция. Прикладная математика.

АВТОР: Колмакова Алиса Сергеевна
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение «Средняя школа №12»
Обучающиеся 8 а класса.

РУКОВОДИТЕЛЬ: Латыпова Зугура Минигалимовна
учитель математики,
высшей категории.

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение «Средняя школа №12»

2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ

«Тройственность теоремы Пифагора»

Теорема Пифагора по праву считается самой важной в курсе геометрии и заслуживает пристального внимания. Теорема окружена богатейшим историческим материалом, связанным с её появлением и способами доказательства. Пифагор и его наследие вот уже более двух веков актуальны.

Цель: решить задачу № 2629* из научно – популярного физико – математического журнала «Квант» (номер №11-12, 2020 год, стр.12), используя программную среду Geogebra на основе тройственности теоремы Пифагора.

В результате поисковой деятельности и благодаря автору книги Эли Маор, автор проекта построила новый восхитительный, почти игровой, способ доказательства вечно молодой теоремы Пифагора и его идеи тройственности.

Была достигнута цель работы, заключающаяся в пополнении и обобщении знаний по доказательству теоремы Пифагора. Удалось решить задачу из журнала «Квант», вычислить площадь данной фигуры с помощью программы Geogebra и применяя формулу Пика для вычисления площадей фигур. Углубила знания по теме, выйдя за страницы школьного учебника, показала значимость, современность теоремы Пифагора.

Собранный материал ещё больше убеждает в том, что теорема Пифагора является великой теоремой геометрии, имеет огромное теоретическое и практическое значение.

Такие конструкции кроме математической эстетичности обладают множеством интересных свойств, а также оказывается полезной для доказательства различных содержательных фактов

ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

Объект исследования: Тройственность теоремы Пифагора.

Предмет исследования: Задача №2629* из научно – популярного физико – математического журнала «Квант» (номер №11-12, 2020 год, стр.12).

Методы исследования: поисковый, исследовательский, практический.

Цель исследования: решить задачу № 2629* из научно – популярного физико – математического журнала «Квант» (номер №11-12, 2020 год, стр.12), используя программную среду Geogebra на основе тройственности теоремы Пифагора.

Для достижения цели поставлены и решены следующие задачи:

- проанализировать, построить конструкцию из книги «Теорема Пифагора: 4000 – летняя история» историка математики из Израиля Эли Маор и доказать идеи тройственности теоремы Пифагора;
- с помощью программы Geogebra, применяя формулу Пика для вычисления площади фигур подтвердить 15 выводов Эли Маор;
- решить задачу№ 2629* из журнала «Квант», построив конструкцию Эли Маор.

Гипотеза: истинно ли тройственность теоремы Пифагора?

Новизна исследования состоит в том, что, я с помощью программы Geogebra построила конструкцию и решила задачу № 2629, доказав тройственность теоремы Пифагора с 15 –ю выводами по книге Эли Маор.

Продукт исследования: создание электронного пособия по геометрии.

Практическая значимость работы: изучение истории развития геометрии прививает любовь к данному предмету, способствует развитию познавательного интереса, общей культуры и творчества, а так же развивает навыки научно-исследовательской работы.

ВВЕДЕНИЕ

Теорема Пифагора – одна из главных теорем геометрии. Пифагор и его наследие вот уже более двух веков ***актуальна,*** т.к. широка география теоремы Пифагора: Древний Китай и Вавилон, Древняя Греция и современная Западная Европа, широка временной диапазон: теореме Пифагора уже 2500 лет, имеется более 500 способов ее доказательства.

Теорема Пифагора является самым известным явлением во всех сферах математики. С ее помощью доказываются многие другие теоремы и решаются задачи из различных областей: физики, астрономии, строительства и др. Сегодня теорема Пифагора усовершенствована и расширена в понимании четырехмерного пространства – времени, благодаря чему она играет буквально ключевую роль в теории относительности Эйнштейна.

1. ИДЕЯ ТРОЙСТВЕННОСТИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА И 15 ЕГО ВЫВОДОВ ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

В популярной книге Эли Маор «Теорема Пифагора: 4000–летняя история» рассматривается восхитительная конструкция, почти игровой, способ доказательства теоремы Пифагора. Эли Маор (родился 4 октября 1937 г.) – израильский автор научно – популярных книг по математике, преподаватель математики и историк математики. Он написал несколько научно – популярных книг по математике, посвященных числу Эйлера и его истории, теореме Пифагора, читает лекции по всей стране в США для Математической ассоциации Америки.

При построении рассматриваем знаменитый прямоугольный «египетский» треугольник (например со сторонами 3,4,5), на катетах и гипотенузе которого построены квадраты с площадями S_1, S_2, S_3 – это геометрическое отображение теоремы Пифагора.

На следующем этапе (дважды) полученное построение (геометрическая фигура) усложняется. Крайние точки квадратов соединяются, образуя треугольники одинаковой площади.

И на их наибольших сторонах снова строят квадраты. ***За 3 идентичных шага*** выстраивается конечная геометрическая фигура для которой совершенно точно выполняется формула теоремы Пифагора о квадратах сторон.

Используя программную среду Geogebra можно построить конструкцию теоремы Пифагора доказав тем самым, идею тройственности. Такая конструкция оказывается полезной для доказательства различных содержательных фактов.

Построим конструкцию Эли Маор, применяя теорему Пифагора трижды, и с помощью программы Geogebra докажем 15 выводов.

1этап. Построим знаменитый прямоугольный «египетский» треугольник

(Например, со сторонами 3, 4 и 5), на катетах и гипотенузе которого

построены квадраты с площадями S_1, S_2, S_3 (геометрическое отображение теоремы Пифагора).

2.этап. На следующем этапе (дважды) полученное построение (геометрическая фигура) усложняется. Крайние точки квадратов соединяются.

3.этап. На их наибольших сторонах снова строим квадраты.

4.этап. За 3 идентичных шага выстраивается конечная геометрическая фигура, для которой совершенно точно выполняется формула теоремы Пифагора о квадратах сторон.

2. Этапы построения конструкции задачи № 2629 из научно – популярного физико – математического журнала «Квант» (номер №11-12,2020 год, стр.12) и вычисление площади фигуры с помощью программы Geogebra и формулой Пика.

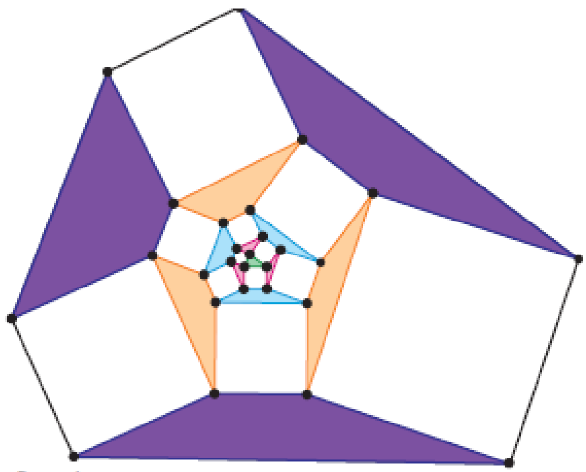


Рис. 1

На рисунке 1 в центре изображен произвольный (зеленый) треугольник. На его сторонах во внешнюю сторону построили белые квадраты. Некоторые из их вершин соединили отрезками, на них снова построили во внешнюю сторону белые квадраты и т.д. В промежутках между квадратами образовались треугольники и четырехугольники, которые окрасили в различные цвета.

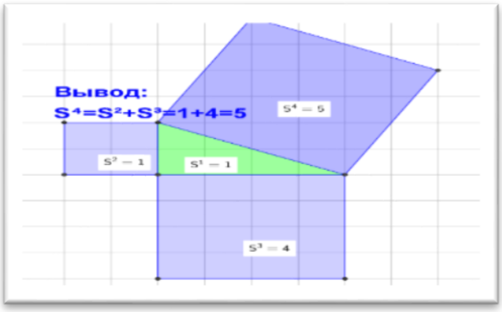
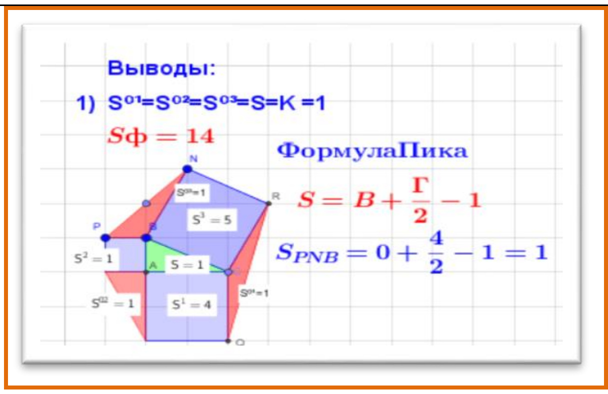
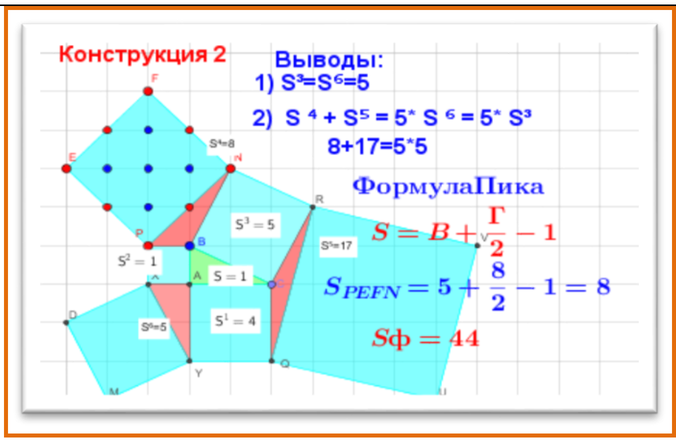
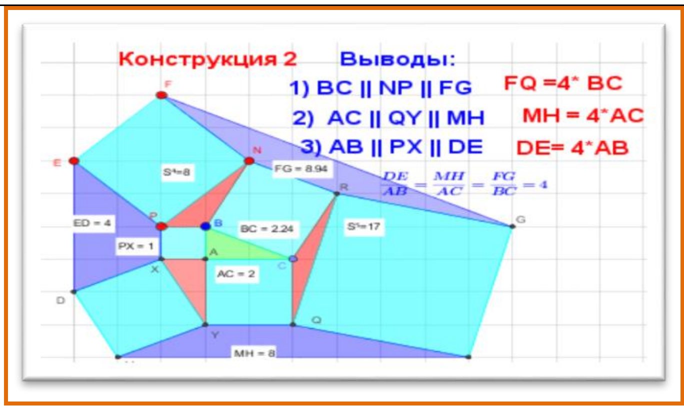
Докажите, что
а) все окрашенные четырехугольники являются трапециями;
б) площади всех многоугольников одного и того же цвета равны;
в) отношения оснований одноцветных трапеций равны;
г) Если S=1 – площадь исходного треугольника, а S – площадь многоугольника в I –м слое, то S =1, S_2 =5, а для
n ≥3 выполняется равенство $S_n = 5 S_{n-1} - S_{n-2}$.

Автор: Ф Нилов

Задачу № 2629 решаем построив конструкцию Эли Маор для прямоугольного треугольника площадью 1, с катетами 1 и 2. Площадь квадрата построенного на гипотенузе равен 5. На следующем этапе (трижды) полученное построение (геометрическая фигура) усложняется. Крайние точки квадратов соединяются.

На их наибольших сторонах снова строим квадраты. За 4 идентичных шага выстраивается конечная геометрическая фигура, которая изображена в условии задачи.

2. ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA, ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР С ПРОГРАММОЙ GEOGEBRA И ФОРМУЛОЙ ПИКА.

<table>
<tr>
<td>1 этап.
Построим квадраты на сторонах исходного квадрата. $S_3 = S_1 + S_2$; (истинно)
Вычислим площади фигур с помощью программ Geogebra, формулой Пика.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2 этап.
Соединим вершины квадратов и получим треугольники. Вычислим площади треугольников по формуле Пика. Площади треугольников равны площади исходного треугольника.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3.Этап
Построим квадраты на сторонах треугольников.
Сумма площадей, построенных на сторонах тупоугольных треугольников 5 раз больше площади квадрата построенного на гипотенузе исходного треугольника и 5 раз больше S_6.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.Этап
Крайние точки квадратов соединяются, получим трапеции. Стороны квадратов построенных на сторонах прямоугольного треугольника параллельны большим основаниям трапеций. Длина больших оснований этих трапеций в 4 раза больше сторон исходного прямоугольного треугольника.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

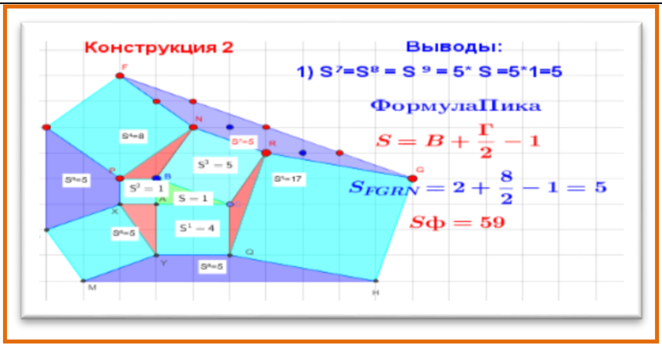
<table>
<tr>
<td>

5.Этап.

Вычислим площади трапеций по формуле Пика и с помощью программы Geogebra.

Площади трапеций равны и их площади в 5 раз больше площади исходного ΔABC

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

6.Этап.

Докажем равенство треугольников:

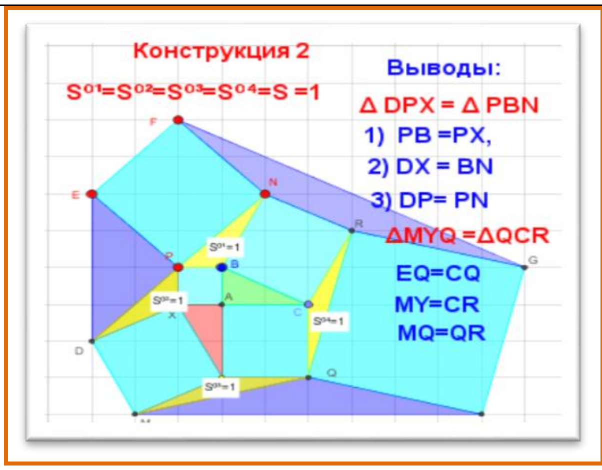
Δ DPX = Δ HBN (по трем сторонам)

a) PB=PX
b) DX= BN
c) DP=PN

ΔMYQ =Δ QCR (по трем стронам)

а) EQ=CQ
б) MY=CR
в) MQ=QR

</td>
<td>



Площади всех треугольников равны 1, т.е равны

площади исходного треугольника

</td>
</tr>
<tr>
<td>

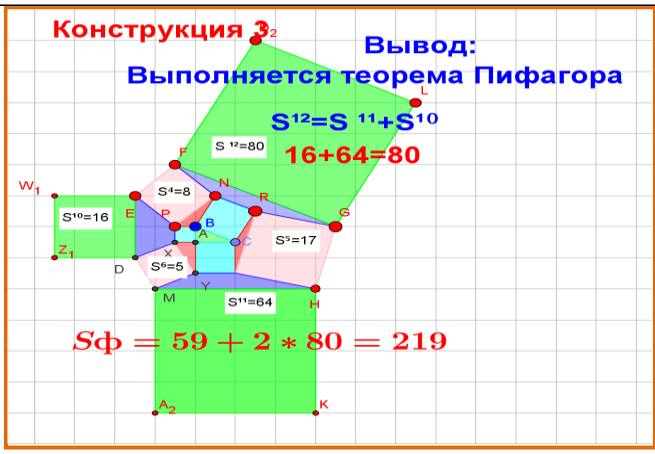
7 этап.

Построим квадраты на больших основаниях первых трапеций и вычислим их площади.

Для этих квадратов,

<u>**Второй раз выполняется теорема Пифагора.**</u>

</td>
<td>



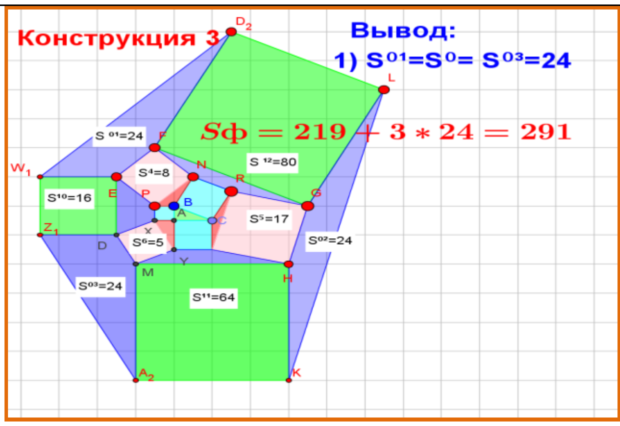
</td>
</tr>
<tr>
<td>

8. Этап.

Крайние точки квадратов соединяются, получим новые трапеции.

Трапеции имеют одинаковые площади.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

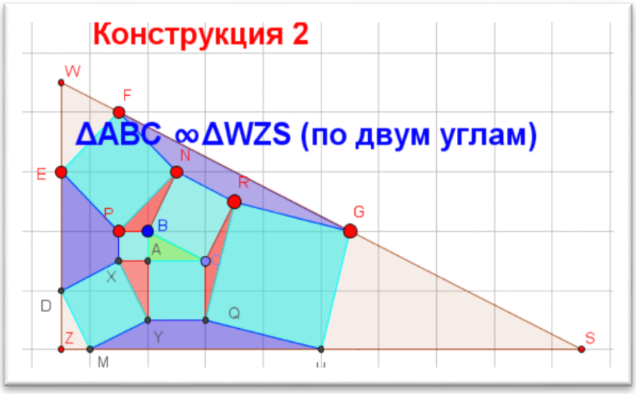
7. Этап.

Достроим конструкцию до треугольника WZS.

Треугольники

ΔABC ∞ WZS (подобны по двум углам).

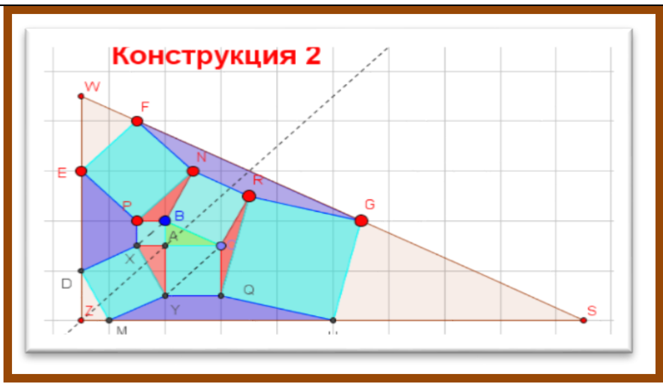
$$\frac{RP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{QR}{AB} = K$$



8.Этап.

Диагонали квадратов являются биссектрисами его углов, поэтому углы по 45^0.

GA || DC || QB,

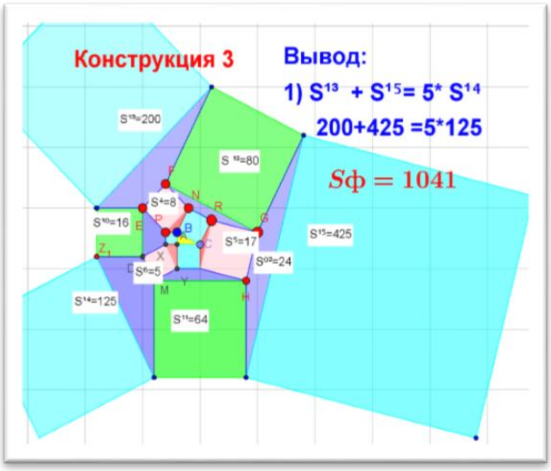


9.Этап.

Построим квадраты на больших основаниях вторых трапеций.

Сумма

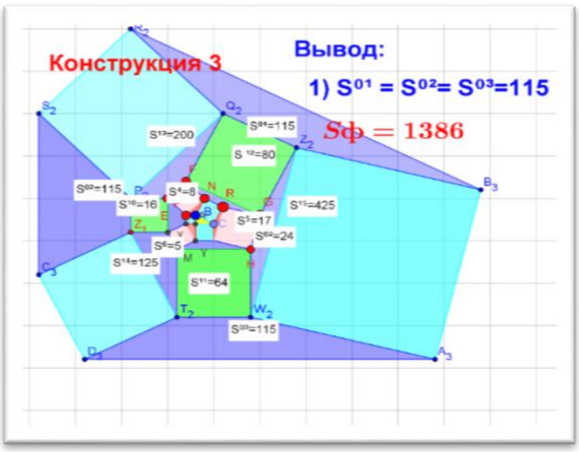
S_{13} +S $_{15}$ площадей, построенных на больших основаниях трапеций 5 раз больше S_{14}.



10 этап.

Крайние точки квадратов снова соединяем, получаем трапеции.

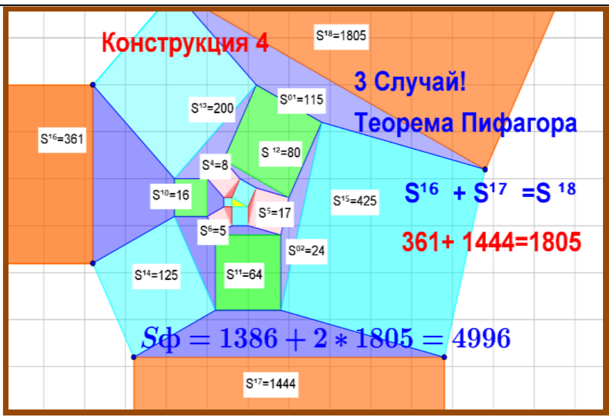
Площади трапеций равны.



<table>
<tr>
<td>

12.этап.
Снова строим квадраты на больших основаниях трапеций. Снова выполняется теорема Пифагора.

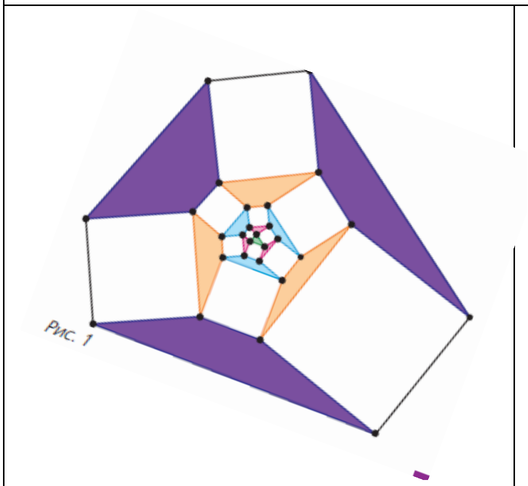
</td>
<td>



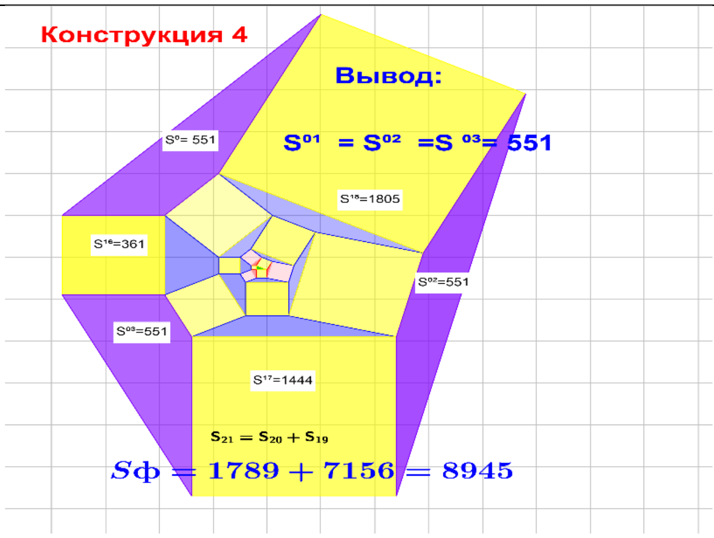
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

13.этап. За 4 идентичных шага выстраивается конечная геометрическая фигура, для которой совершенно точно выполняется формула теоремы Пифагора о квадратах сторон прямоугольного треугольника с площадью 1 и площадью 2 построенного на гипотенузе.

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Вывод:

1) Площади квадратов построенных на больших основаниях трапеций в 16 раз больше площадей квадратов построенных на сторонах исходного треугольника , при выполнении 3 конструкции. Третий раз выполняется теорема Пифагора $S_{18}= S_{17} +S_{16}$, 361+144 =1805

2) За 4 идентичных шага выстраивается конечная геометрическая фигура, для которой совершенно точно выполняется формула теоремы Пифагора о квадратах сторон прямоугольного треугольника.

$S_4 =5 S_3 - S_2$
S =4*361 -16=1789,(площадь квадрата,построенного на первом катете при 4 шаге),
S = 5 *1444 -64 =7156 (площадь квадрата,построенного на втором катете при 4 шаге),
S=5*1805 -80=8945(площадь квадрата,построенного на гипотенузе при 4 шаге).
$S_{21} =S_{20} +S_{19}$; 8945= 7156 +1789; т.е выполняется формула из задачи.
Значит гипотеза верна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема Пифагора настолько известна, что трудно представить себе человека, не слышавшего о ней. Я изучила ряд исторических и математических источников, в том числе информацию в Интернете, и увидела, что теорема Пифагора интересна не только своей историей, но и тем, что она занимает важное место в жизни и науке. Итак, теорема Пифагора - одна из главных и, можно сказать, самая главная теорема геометрии. Значение ее состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. Теорема Пифагора замечательна и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он дал полноценное научное доказательство этой теоремы.

Интересна личность самого учёного, память о котором неслучайно сохранила эта теорема. Пифагор – замечательный оратор, учитель и воспитатель, организатор своей школы, ориентированной на гармонию музыки и чисел, добра и справедливости, на знания и здоровый образ жизни. Он вполне может служить примером для нас, далёких потомков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сайт** Geometry classes, Problem 884: Pythagorean Curiosity. Right triangle with squares and trapezoids. College, SAT Prep. Elearning, Online math tutor (gogeometry.com)

Геометрия Проблема 884: Пифагора Любопытство, Пятнадцать выводов.

2.Сайт https://ru.wikipedia.org/wiki/ Теорема_Пифагора Теорема Пифагора.

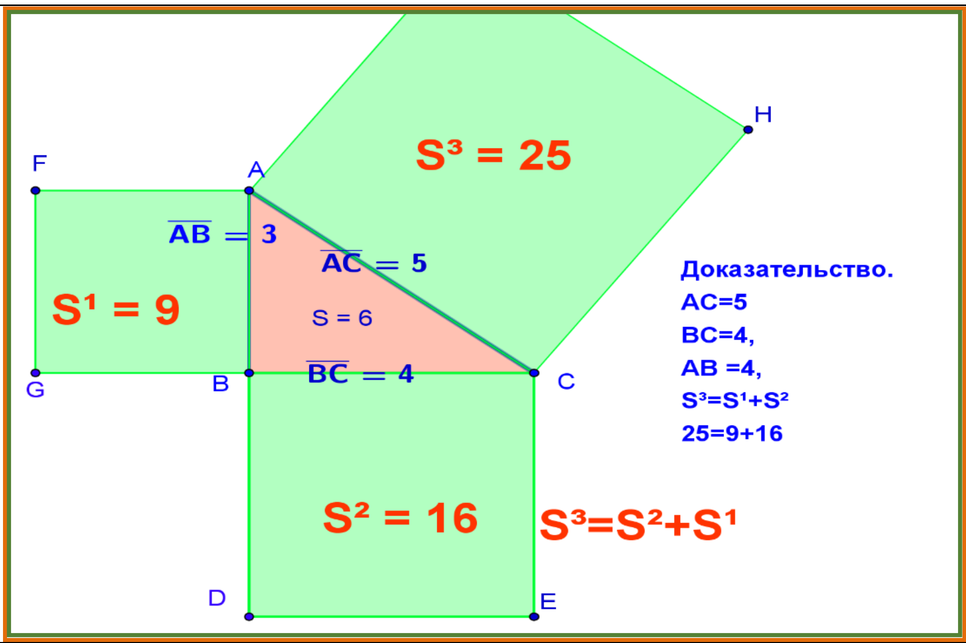
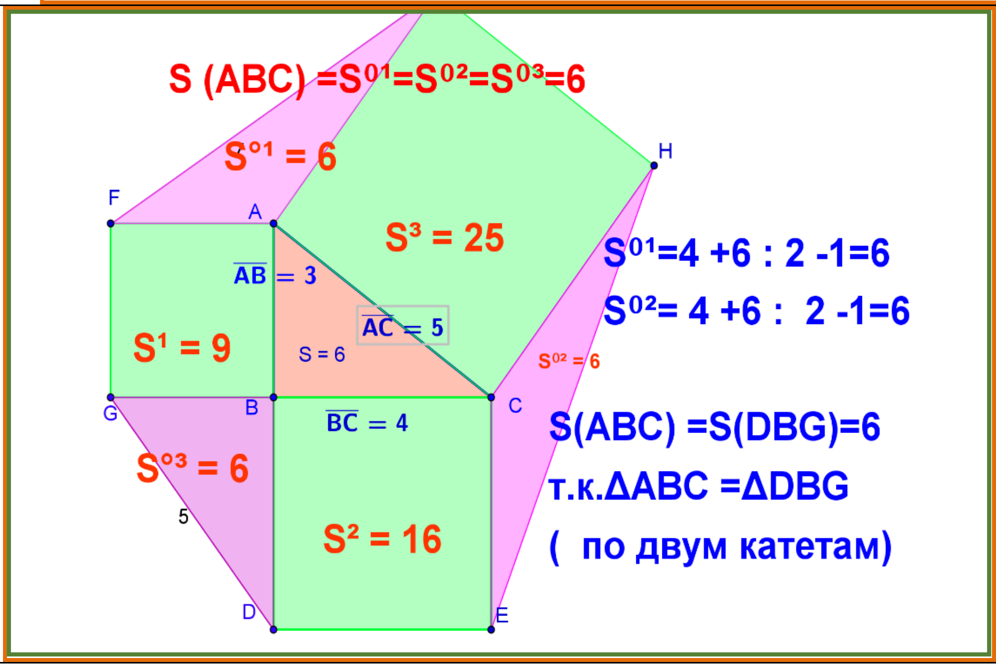
3. Сайт https://ru.wikipedia.org/wiki/ Маор,_Эли Эли Маор (биография, труды)

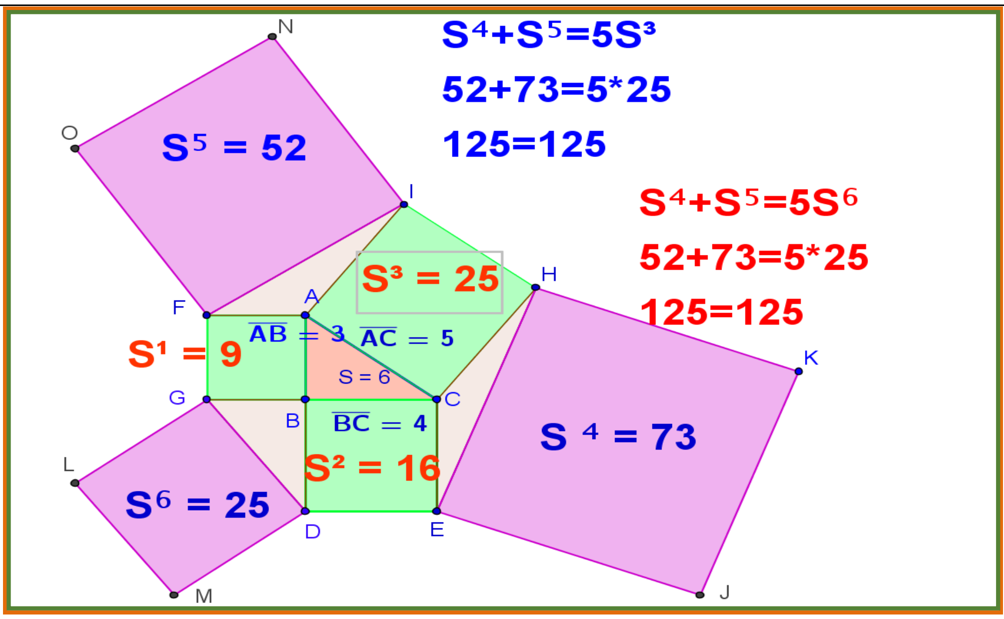
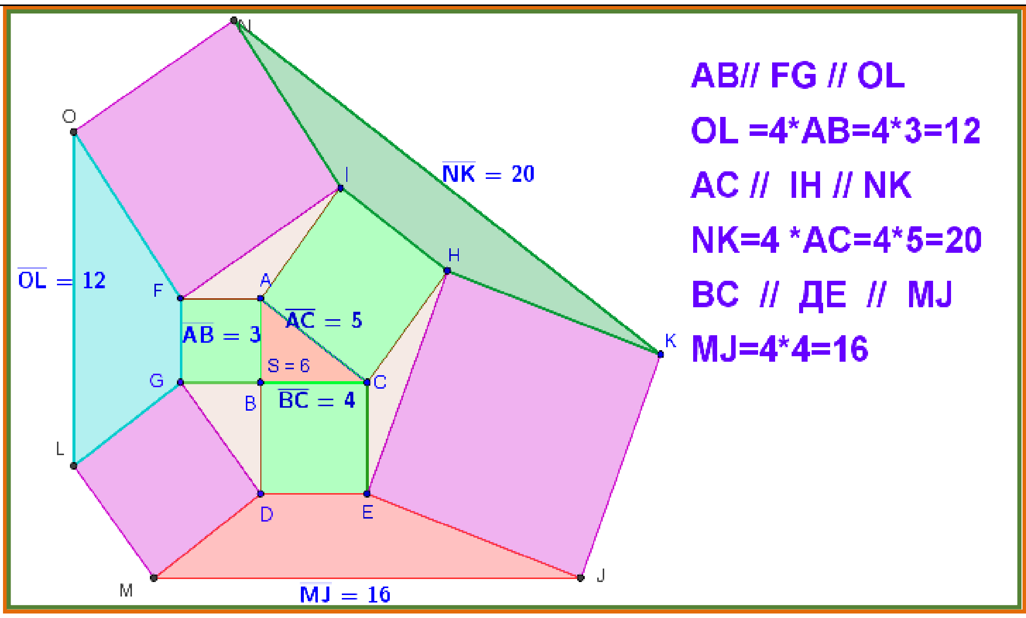
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

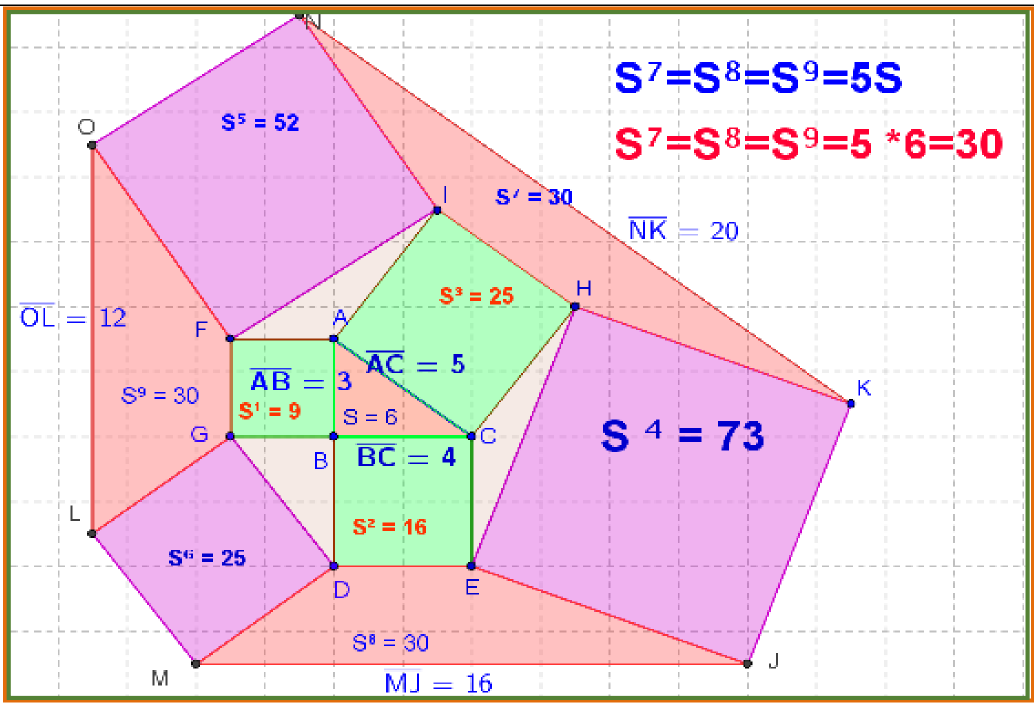
1.1.Этапы построения конструкции, доказательство 15 выводов из книги Эля Маор с помощью программы Geogebra и формулой Пика.

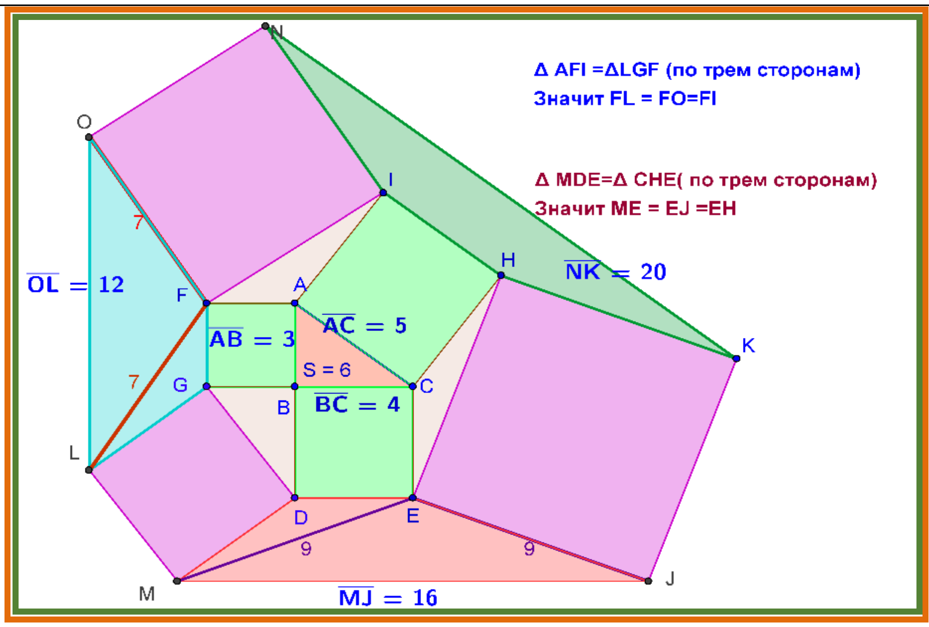
Дано:	**Доказать:**
$\Delta ABC, \angle A = 90^0$ $BC = a = 4, AC = b = 5, \quad AB = c = 4$ S_1, S_2, S_3 - площади квадратов построенных на сторонах прямоугольного треугольника. $S = S^{01} = S^{02} = S^{03} = S_{ABC}$ – площади подобных треугольников, с коэффициентом подобия К. S_4, S_5, S_6 - площади квадратов, построенных на сторонах треугольников. S_7, S_8, S_9 - площади трапеций. S_{10}, S_{11}, S_{12} - площади квадратов, построенных на больших основаниях трапеции.	1. $S_3 = S_1 + S_2;$ 2. $S_{ABC} = S_{DBG}$ 3. $S_{DBG} = S^{03}$, $S_{ABC} = S$, $S_{FAI} = S^{01}$, $S_{CEH} = S^{02}$ $S = S^{01} = S^{02} = S^{03} = S_{ABC}$ 4. $S_4 + S_5 = 5 S_3 = 5 S_6$; 5. $S_3 = S_6 = 25$; 6. AC// KN ; AB // OL; BC // MI; 7. К N = 4 в, OL = 4c, M J = 4a; 8. S_7, S_8, S_9 - площади трапеции; 9. $S_7 = S_8 = S_9 = 5S$; 10. OF =FL, ME =EI, 11. $\Delta ABC \infty \Delta RQP$; **$S_{ABC} = S_{LQM} = 6$;** 12. $QB - биссектриса \angle Q и \angle B \quad QB \perp FE$ 13. $S_{10} = 16 S_3$; $S_{11} = 16 S_1$; $S_{12} = 16 S_2$; 14. $S_{10} = S_{11} + S_{12}$

1.2.Этапы построения конструкции, доказательство 15 выводов из книги Эля Маора с помощью программы Geogebra и формулой Пика.

1. Этап Построим квадраты на сторонах исходного квадрата. $S_3 = S_1 + S_2$; (истинно) Вычислим площади фигур с помощью программ Geogebra, формулой Пика.	
2.Этап Соединим вершины квадратов и получим треугольники. Вычислим площади треугольников по формуле Пика. Площади треугольников равны площади исходного треугольника.	

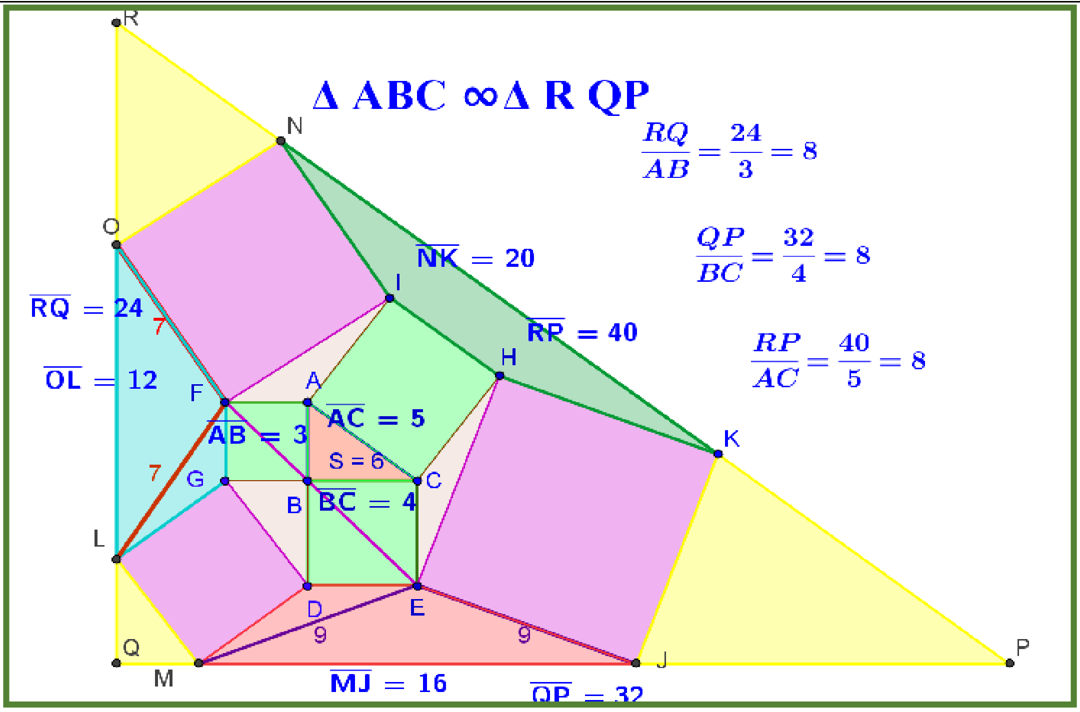
3.Этап Построим квадраты на сторонах треугольников	 Сумма площадей, построенных на сторонах тупоугольных треугольников 5 раз больше площади квадрата построенного на гипотенузе исходного треугольника и 5 раз больше S_6.
4.Этап Крайние точки квадратов соединяются, получим трапеции.	 Стороны квадратов построенных на сторонах прямоугольного треугольника параллельны большим основаниям трапеций. Длина больших оснований этих трапеций в 4 раза больше сторон исходного прямоугольного треугольника.

<table>
<tr>
<td>5.Этап
Вычислим площади трапеций по формуле Пика и с помощью программы Geogebra.</td>
<td>

Площади трапеций равны и их площади в 6 раз больше площади исходного ΔABC</td>
</tr>
<tr>
<td>».</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6.Этап.
Докажем равенство треугольников LGF и FAI; MDE и CEH</td>
<td>

Отрезки FQ=FL ME =EJ т.к. треугольники равны по трем сторонам.</td>
</tr>
</table>

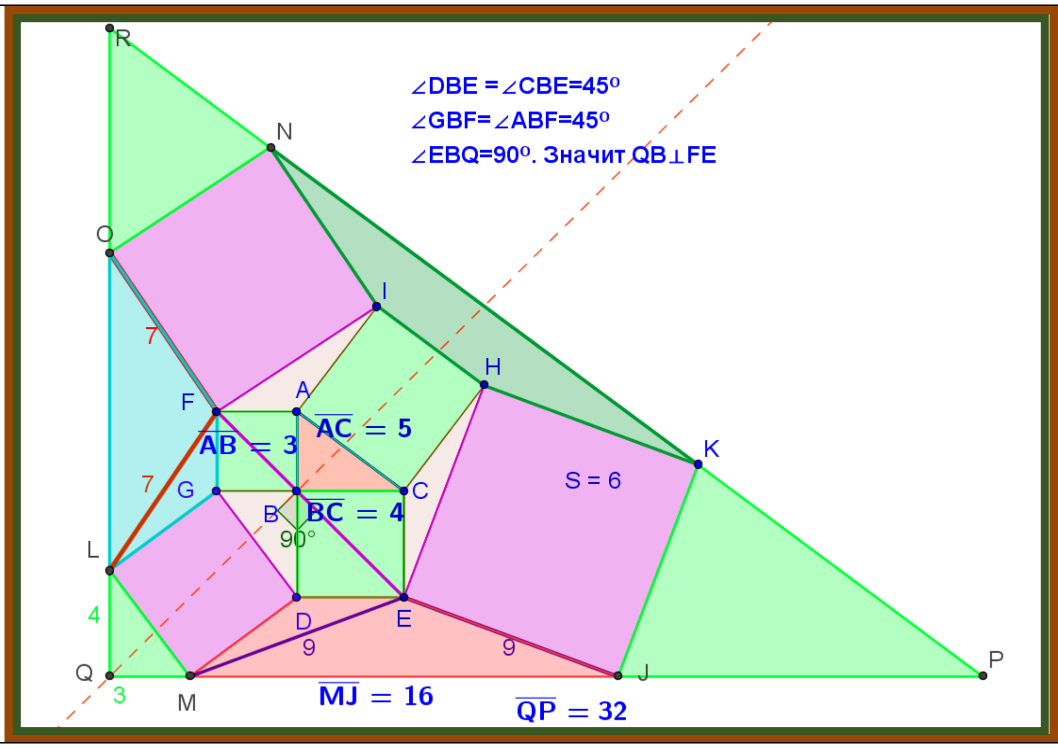
7. Этап. Достроим конструкцию до треугольника RQP. Треугольники подобны (по двум углам).

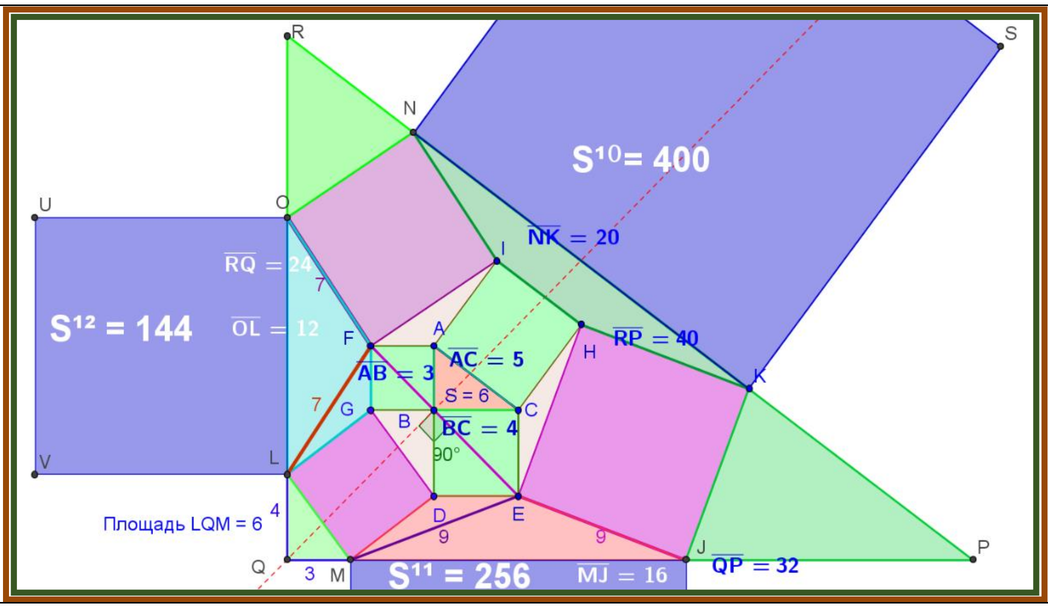


Треугольники
ΔABC ∞ QRP (подобны по двум углам).

$$\frac{RP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{QR}{AB} = K \qquad К= \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = \frac{40}{5} = 8$$

8.Этап. Диагонали квадратов являются биссектрисами его углов, поэтому углы по 45^0. GA || DC || QB,



9.Этап. Построим квадраты на больших основаниях трапеций.	

Доказательство.

1. $S_3 = S_1 + S_2$;
2. $S_{ABC} = S_{DBG} = 6$.(по двум катетам);
3. $S_{DBG} = S^{03}$, $S_{ABC} = S$, $S_{FAI} = S^{01}$, $S_{CEH} = S^{02}$ (по формуле Пика, программы Geogebra и формулам планиметрии)

$S = S^{01} = S^{02} = S^{03} = S_{ABC} = 6$

4. $S_4 + S_5 = 5 S_3 = 5 S_6$; (S_4,S_5, S_6 – площади квадратов, построенных на сторонах треугольников)

   $S_4 = 73$, $S_5 = 52$, $S_6 = 25$; $S_3 = 25$; $S_6 = 25$;

   $S_4 + S_5 = 5 S_3$; $52+73 = 5*25$;

   $S_4 + S_5 = 5 S_6$; $52+73 = 5*25$; $125=125$:

5. $S_3 = S_6 = 25$ (ΔABC =ΔВДG (по двум катетам);
6. AC// IH// KN ; AB // FQ // OL; BC // DE // MI;
7. К N = 4в, OL = 4c, M J = 4a;
8. S_7, S_8, S_9 - площади трапеции(т.к. IH // KN ; FQ // OL; DE // MI);
9. $S_7 = S_8 = S_9 = 5S$;

$S_7 = S_8 = S_9 = 5S = 5 *6 =30$;

10. OF =FL,т.к .ΔL FG =Δ FIA (по трем сторонам);

ME =EI, т.к. Δ ДME = C HE (по трем сторонам);

11. Δ ABC∞ ΔRQP (по двум углам)

12. $\frac{RQ}{AB} = \frac{QP}{BC} = \frac{RP}{AC} = \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = \frac{40}{5} = 8$

13. $S_{ABC} = S_{LQM} = 6$;

14. $\angle CBE = \angle DBE = 45^0$;
$\angle ABF = \angle GBF = 45^0$;
$\angle QDE = \angle OBF = 45^0$
$значит\, OB - биссектриса\, \angle Q\, и\, \angle B \quad QB \perp FE$

15. $S_{10} = 16\ S_3$; $S_{11} = 16\ S_1$; $S_{12} = 16\ S_2$;

$S_{10} = 16\ S_3 = 16 * 25 = 400$; $S_{11} = 16\ S_1 = 16*16 = 256$; $S_{12} = 16 S_2 = 16 * 9 = 144$;

$S_{10} = S_{11} + S_{12}$

$S_{10} = 144 + 256 = 400$.