**ОБУЧЕНИЕ СЕМИКЛАССНИКОВ ОСОЗНАННОМУ УСВОЕНИЮ**

**СОДЕРЖАНИЯ, ФОРМУЛИРОВОК И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ**

**Абубикерова Г.**

Россия, г. Астрахань, ГБОУ АО «Астраханская лингвистическая гимназия»

*Обоснована необходимость разработки заданий, выполнение которых приводит к пониманию содержания теорем непосредственно перед их доказательством. Это приводит к непроизвольному усвоению содержания теорем, запоминанию их формулировок.*

Преподавание геометрии в школе играет особую роль в умственном воспитании детей. Это единственный школьный курс, имеющий вполне дедуктивный характер. Даже школьная алгебра не может сравниться с этим предметом в данном отношении. Конечно, и в курсе геометрии в школе не все доказывается совершенно строго, и в ряде случаев при доказательствах мы используем жизненные представления вместо точных теоретических обоснований. Но несмотря на это, геометрия обеспечивает логическое развитие учащихся. Под правильным преподаванием здесь имеется в виду такое преподавание, в котором ни одна теорема, доказываемая в учебнике, не остается без доказательства в изложении учителя и учащихся. Особое внимание необходимо уделять задачам на построение. Следует считать обязательным требование, чтобы каждый ученик свободно владел алгоритмами решения следующих задач на построение циркулем и линейкой, о которых говорится в стандарте образования: деление отрезка пополам, построение треугольника по трем сторонам, построение перпендикуляра к прямой, построение биссектрисы, деление отрезка на n равных частей. К этому нужно добавить умение строить угол, равный данному, а также построение третьего пропорционального к двум отрезкам и четвертого пропорционального к трем отрезкам. Добиваться этого можно, помещая эти задачи в математические диктанты.

Теоремы бывают разных видов. Совершенно особо выглядят теоремы существования, формулируемые так: «существует объект, имеющий данные свойства: хА(*х*)». **Теорема 19.1.** Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка. [ 3, с. 125].

Теоремы единственности: «существует только один объект, обладающий данным свойством». **Теорема 5.1.** Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну. [3 , с. 35].

В большинстве теорем школьного курса математики доказываются свойства или признаки тех или иных объектов. Строение этих теорем таково: если верно высказывание А(*х*), то верно высказывание В(*х*), т. е. (∀*х*∈М(А(*х*)⇒В(*х*)).

Например, теорема о вертикальных углах может быть прочтена таким образом: для любых двух углов, если верно, что эти углы вертикальные, то верно, что эти углы равны. Или короче: для любых двух углов, если углы вертикальные, то они равны.

В теоремах можно выделить три части:

разъяснительную часть (∀*х*∈М), показывающую, на каком множестве рассматривается теорема;

условие А(*х*), показывающее, что известно об объекте *х*;

заключение В(*х*), показывающее, что требуется доказать.

Если А⇒В, то А называется достаточным свойством для В, а В – необходимым свойством для А.

Если у теоремы поменять местами условие и заключение, сохраняя разъяснительную часть, то получится обратная теорема. Именно, для теоремы ∀*х*∈М(А(*х*)⇒В(*х*)) обратной является теорема ∀*х*∈М(В(*х*)⇒А(*х*)). Например, для теоремы о накрест лежащих углах: **Теорема 14.2**. Если сумма односторонних углов. Образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180о, то прямые параллельны [ 3, с. 89].Обратная ей будет **Теорема 15.2.(обратная теореме 14.2.)** Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180[3 , с. 97].

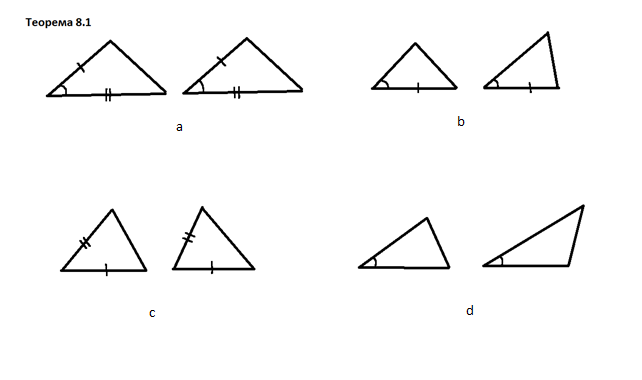
Если у теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями, сохраняя разъяснительную часть, то получится противоположная теорема. Именно, для теоремы ∀*х*∈М (А(*х*)⇒В(*х*)) противоположной является теорема ∀*х*∈М(⎤А(*х*)⇒⎤В(*х*)). Например, для теоремы о накрест лежащих углах **Теорема 14.1**: Если два внутренних или два внешних накрест лежащих угла, образованных при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны [3 , с. 88], противоположная теорема выглядит так **Теорема 15.1**: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то пары внутренних или пары внешних накрест лежащих углов равны [ 3, с. 96].

Бывает, что исходная теорема А⇒В верна, а обратная и противоположная теоремы не верны. Поэтому прежде чем начать доказывать теоремы, нужно сначала поработать над формулировкой теорем, уяснением их содержания, так как учащимся необходимо иметь представление, о чем идет речь в целом, чтобы они сами приходили к нужным выводам. Выше мы рассмотрели, какие теоремы преподаются в 7 классе за первое полугодие. А теперь попытаемся понять, как нужно отрабатывать формулировки. Для этого сначала на листе А4 изображаются рисунки, на которых наглядно показаны правильные и неправильные иллюстрации формулировки теоремы, а затем задаются вопросы по тексту теоремы. Учащиеся, глядя на чертежи, пытаются сопоставить каждый чертеж с изучаемой теоремой, на основании чего делается выбор рисунка, правильно отображающего содержание теоремы. Учитель использует и контрпримеры – на таких рисунках не отражено или неправильно отражено что-то из условия теоремы. Это делается для того, чтобы учащиеся сопоставляли данные на рисунке элементы с данными в тексте теоремы. В процессе такой работы учащиеся, формулируя ответы, лучше усваивают смысл той или иной изучаемой теоремы.

В качестве примера приведем теорему о первом признаке равенства треугольников [ 1, с. 53].

**Теорема 8.1**. (Первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

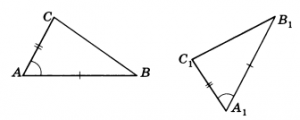
Предлагаем учащимся внимательно посмотреть на рисунки 8.1 и выделить те из них, которые соответствуют формулировке теоремы.

**На одном из рисунков (8.1а) изображена иллюстрация теоремы о первом признаке равенства треугольников, и можно на основании этой иллюстрации провести рассуждения, приводящие к выводу о равенстве треугольников. На других же рисунках какие-либо из условий теоремы о I признаке равенства треугольников нарушены: на одном (8б) нет равенства второй пары соответственных сторон, на другом – нет равенства углов между двумя парами соответственно равных сторон (8с), на третьем (8d) – только одна пара равных углов.

Эта работа проводится для того, чтобы учащиеся уяснили, что нарушение какого-то условия в формулировке теоремы не приводит к справедливости заключения. Учащиеся, проанализировав рисунки, отчетливо это видят. Они самостоятельно приходят к выводу, что полностью отражает содержание теоремы лишь рис. 8.1а. *Судя по условию теоремы равенство двух сторон и угла между ними дает нам равенство треугольников.*

(Когда отработана формулировка теоремы, можно приступать к доказательству.

Равенство треугольников ABC и А1В1С1 будем обозначать так: Δ ABC = Δ А1В1С1. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, сравнивая некоторые их элементы. Доказательство теоремы производится на доске по частям и записывается учащимися в тетрадях. Для закрепления доказательства ставится вопрос: “На какие знания мы опирались в доказательстве теоремы?”, “Облегчит ли полученный признак решение задач на равенство треугольников?”, “Из равенства треугольников будет ли следовать равенство соответственных сторон и соответственных углов?”.

[](http://wiki.eduvdom.com/_detail/subjects/geometry/acb_and_c1b1a1.png?id=subjects:geometry:%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%B8_%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2)Дано:

АВ = A1B1, АС = A1C1 ∠ А = ∠ А1

Доказать:

Δ ABC = Δ A1B1C1.

Рис. 1. Иллюстрация теоремы о первом признаке равенства треугольников

Доказательство.

Отработав формулировку теоремы на чертежах, начинаем доказательство.

Доказательство

- Вспомним определение равных треугольников.

[Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.]

- Так и поступим: будем накладывать ∆ АВС на ∆ А1В1С1. Теперь нужно решить, с чего начать: Накладывать сразу весь треугольник или сначала одну сторону?

[Конечно, сначала одну сторону. Это легче.]

- И еще вопрос: сразу накладывать сторону или сначала вершину?

[Сначала вершину треугольника.]

- Обязательно обратите внимание, в ходе доказательства необходимо четко различать, какие элементы треугольника совпадают благодаря наложению

(мы их занумеруем), а какие – по условию теоремы. Будем накладывать ∆ АВС на ∆ А1В1С1 так, чтобы

1) точка А совместилась с точкой А1;

2) луч АС прошел по лучу А1С1.

Что можно сказать про точку С?

[Так как АС = А1С1, то точка С совпадает с точкой С1.]

- Правильно. Так как А = А1 по условию, то мы можем наложить

∆ АВС на ∆ А1В1С1 Так, чтобы: 3) луч АВ прошел по лучу А1В1.

Что происходит дальше?

[Так как АВ = А1В1, то точка В совпадет с точкой В1. И сторона ВС совпадет со стороной В1С1..]

- Почему? Точка В совпала сточкой В1, точка С совпала сточкой С1, а через две точки можно провести только одну прямую – есть такое утверждение. Треугольники АВС и А1В1С1 полностью совместились, значит они равны по определению равных треугольников. Теорема доказана.

После доказательства задаются вопросы.

- Всегда ли нам удаётся реально совместить треугольники?

Действительно, иногда совместить треугольники нет возможности.

- Что же делать?

Поставленный вопрос подразумевает сравнение треугольников. Ясно, что наложение треугольников невозможно, появляется потребность сравнения отдельных элементов.

- Все шесть элементов треугольников надо сравнить?

Достаточно сравнить лишь три элемента одного треугольника с тремя элементами другого треугольника.

- Какие, например?

Вот тут нам на помощь придут признаки равенства треугольников, они нам расскажут, какие именно элементы нужно сравнивать.

- Что такое признак равенства треугольников и сколько существует признаков?

Условия, при которых два данных треугольника оказываются равными, называются признаками равенства треугольников. Можно сказать, что признак – это примета, по которой можно узнать те или иные свойства фигур.

- О каких элементах для сравнения мы будем сегодня говорить?

Далее применяем доказанную теорему к решению задач.

При построении чертежей целесообразно использовать цветные мелки. Работа в классе, один ученик работает у доски, остальные с места помогают решить задачу.

Задача № 173 [2, с. 58]. Даны Δ*АСВ* и Δ*А*1*С*1*В*1,где  *АВ* = *А*1*В*1, *АС = А*1*С*1;

http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А* = http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А*1, *АР* = *А*1*Р*1. Докажите равенство Δ*ВРС* и Δ*В*1*Р*1*С*1.

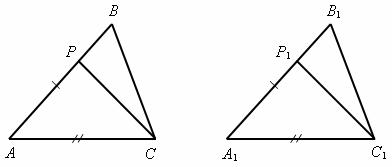


Рис.2. Иллюстрация условия задачи № 173

Дано: Δ*АСВ* и Δ*А*1*С*1*В*1; *АВ* = *А*1*В*1; *АС = А*1*С*1;

http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А* = http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А*1; *АР* = *А*1*Р*1.

Доказать: Δ*ВРС* = Δ*В*1*Р*1*С*1.

Доказательство

Рассмотрим Δ*АСВ* и Δ*А*1*С*1*В*1:

*АВ = А*1*В*1 (по условию), *АС = А*1*С*1 (по условию), http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А* = http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*А*1 (по условию), тогда Δ*АСВ* = Δ*А*1*С*1*В*1 (первый признак, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними).

Отсюда *ВС = В*1*С*1 и http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*В* = http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*В*1.

По условию *АВ = А*1*В*1 и *АР = А*1*Р*1, тогда и *РВ* = *Р*1*В*1 как разности двух пар соответственно равных отрезков

Рассмотрим Δ*ВРС* и Δ*В*1*Р*1*С*1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *ВС = В*1*С*1 *РВ* = *Р*1*В*1 http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*В* = http://festival.1september.ru/articles/591195/angle.gif*В*1 | http://festival.1september.ru/articles/591195/f_clip_image014.gif | Δ*ВРС* = Δ*В*1*Р*1*С*1 (первый признак, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними). |

**Литература**

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы.   2-е изд. — М., 2014. — 384 с.

2. Левитас Г.Г. Методика преподавания математики в основной школе: учебное пособие. — Астрахань: Изд-во АГУ, 2008.

3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Геометрия: учебник для 7 класса. — М.: Вентана-Граф, 2012. — 192 с.

**ОБУЧЕНИЕ СЕМИКЛАССНИКОВ ОСОЗНАННОМУ УСВОЕНИЮ**

**СОДЕРЖАНИЯ, ФОРМУЛИРОВОК И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ**

**Абубикерова Г.**

Россия, г. Астрахань, ГБОУ АО «Астраханская лингвистическая гимназия».

*Обоснована необходимость разработки заданий, выполнение которых приводит к пониманию содержания теорем непосредственно перед их доказательством. Это приводит к непроизвольному усвоению содержания теорем, запоминанию их формулировок.*