Мастер-класс
«Подготовка к ЕГЭ по математике. Решение задач с параметром»

Баландина Ирина Сергеевна,
учитель математики
МАОУ «Лицей № 62» г.Саратов

«Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит»
М.В. Ломоносов

Математика всегда считалась одним из самых трудных предметов в школе. Действительно, нельзя усвоить знания по этому предмету без серьезных интеллектуальных усилий, нужно понимать и запоминать правила, держать эти знания в активной памяти на протяжении всего обучения в школе. Мы понимаем объективные трудности наших учеников. Изучение математики формирует не только логическое мышление, но и много других качеств человека: сообразительность, настойчивость, аккуратность, критичность и др. Из русской народной сказки помним слова:
«Вперед поедешь ─ голову сложишь,
направо поедешь ─ коня потеряешь,
налево поедешь ─ меча лишишься».
Выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Прочтя задачу и ещё не производя ни каких действий, нужно стремиться к тому, чтобы научиться видеть, что тот или иной способ непригоден для её решения, а вот какой-то другой способ может быть использован. Такое умение вырабатывается в процессе решения одной и той же задачи разными способами. Именно поэтому часто полезнее решить одну и ту же задачу несколькими различными способами, чем решить три-четыре различные задачи. Речь пойдет о решении задачи с параметром для подготовки к ЕГЭ. Задачи с параметрами вызывают большие затруднения и у учащихся и у учителей. Это связано с тем, что решение таких задач требует не только знания свойств функций и уравнений, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2; \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

При каком значении а, система уравнений имеет 2 решения?

1 СПОСОБ: <u>аналитический</u>

1. Пусть $a^2 - 3a = 0$; тогда $a(a - 3) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 3. \end{array} \right.$$

1.1. Если а = 0, то система уравнений примет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0; \\ xy = 0, \end{cases}$

откуда получаем единственное решение (0;0). Так как нам надо 2 решения, то $a \neq 0$.

1.2. Если а = 3, то система уравнений примет вид $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ xy = 0, \end{cases}$

откуда получаем 4 решения (0;3). (0; -3). (3;0). (-3;0). Так как нам надо 2 решения, то $a \neq 3$.

2. Пусть $a^2 - 3a \neq 0$; тогда $x \neq 0$ и сократим на x. Получим $y = \frac{a2-3a}{x}$, подставим в первое уравнение системы , $x^2 + (\frac{a2-3a}{x})^2 = a^2$; упростим $x^4 - a^2x^2 + (a^2 - 3a)^2 = 0$. Это биквадратное уравнение, решаем с помощью замены , обозначим $x^2 = t$,
$t^2 - a^2 t + (a^2 - 3a)^2 = 0$;
Чтобы биквадратное уравнение имело 2 решения, надо чтобы квадратное имело либо один корень, либо два, но один положительный, а другой отрицательный. Если вспомнить теорему Виета, то так как произведение корней равно свободному члену, а это $(a^2 - 3a)^2$, то случая с одним положительным, а другим отрицательным быть не может, так как

$(a^2 - 3a)^2 > 0$. Поэтому квадратное уравнение должно иметь один корень. Это возможно, если D = 0.
$D = a^4 - 4(a^2 - 3a)^2 = 0$;
$(a^2 - 2(a^2 - 3a))(a^2 + 2(a^2 - 3a)) = 0$;
$a^2 = \pm 2(a^2 - 3a)$;

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = 2(a^2 - 3a), \\ a^2 = -2(a^2 - 3a); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - 6a = 0, \\ 3a^2 - 6a = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 6, \\ a = 2. \end{array}\right.$$
А случай $a = 0$ мы не рассматриваем (см п.1), значит, при $a = 6$ и $a = 2$ D = 0.
Значит, квадратное уравнение имеет одно решение. Но надо, чтобы оно было еще и положительным. Проверим: при $a = 6$, $t^2 - 36t + 18^2 = 0$; $(t - 18)^2 = 0$; $t = 18 > 0$,
при $a = 2$, $t^2 - 4t + 4 = 0$; $(t - 2)^2 = 0$; $t = 2 > 0$.
Ответ: при $a = 2$ и $a = 6$ система уравнений имеет 2 решения

2 СПОСОБ: алгебраический

Применим формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности, для этого второе уравнение системы умножим на 2 и сложим с первым, или из первого вычтем.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2a^2 - 6a, \\ x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2a^2 + 6a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3a^2 - 6a, \geq 0 \\ (x - y)^2 = -a^2 + 6a; \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{3a^2 - 6a}, \\ x - y = \pm\sqrt{-a^2 + 6a} \end{cases}$$
пусть $\sqrt{3a^2 - 6a}$= B, а $\sqrt{-a^2 + 6a}$ = C, получим 4 решения:

$$\begin{cases} x + y = B, \\ x - y = C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = B, \\ x - y = -C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -B, \\ x - y = C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -B, \\ x - y = -C; \end{cases}$$

А надо по условию 2 решения. Какие-то две системы имеют одинаковые правые части.
1. Рассмотрим случай, когда B = C =0, в этом случаи 4 системы превращаются в одну .=> x=0, y=0, одно решение нас не устраивает.

2. Пусть В= 0. $\sqrt{3a^2-6a}$= 0; $3a^2-6a$=0; $3a$ (a - 2) =0; $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2 \end{array}\right.$ a ≠0. => a = 2, подставим в $\sqrt{-a^2+6a}$ = С, => второе уравнение $\sqrt{-4+12}$ = $\sqrt{8}$ существует и С=$\sqrt{8}$. $\begin{cases} x+y = 0, \\ x-y = \sqrt{8}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 0, \\ x-y = -\sqrt{8}. \end{cases}$ У каждой из этих систем одно решение, значит, наша система при a = 2 имеет 2 решения.	**3.** Рассмотрим случай С=О; $\sqrt{-a^2+6a}$ = 0, $-a^2+6a$ = 0, a (6 - a) =0; т.к. a ≠0. => a = 6, подставим в $\sqrt{3a^2-6a}$= В, проверим существует ли корень. $\sqrt{3*36-36}$= $6\sqrt{2}>$0. Существует. $\begin{cases} x+y = 6\sqrt{2}, \\ x-y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = -6\sqrt{2}, \\ x-y = 0. \end{cases}$ У каждой из этих систем одно решение, значит, наша система при a = 6 имеет 2 решения.

Ответ: при a = 2 и a = 6 система уравнений имеет 2 решения

3 СПОСОБ: тригонометрический

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

Если a ≠0, сократим первое уравнение системы на a, получим: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$, (1)

ассоциации с единичной окружностью . $\frac{x}{a}$ = cosα; $\frac{y}{a}$ = sinα;

второе уравнение сократим на a, получим $\frac{x}{a}\frac{y}{a} = \frac{a^2-3a}{a^2}$ (2) ,

далее умножим обе части на 2; 2 sinα cosα = $\frac{2a^2-6a}{a^2}$,

получим формулу синуса двойного угла: sin 2α = $\frac{2a^2-6a}{a^2}$.

Пусть $\frac{2a^2-6a}{a^2} = b$, где -1 ≤ b ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin b + 2\pi k, \\ 2\alpha = \pi - \arcsin b + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin b + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$ ← 2 точки на окружности ← 2 точки на окружности

Надо всего 2 решения. а не 4. Пусть b = 1,т.к. sin 2α = 1, или sin 2α = -1

1) $\frac{2a^2-6a}{a^2} = 1$;
$2a^2 - 6a = a^2$;
$a^2 - 6a = 0$;
$a(a-6) = 0$;
удовлетворяет только $a = 6$

2) $\frac{2a^2-6a}{a^2} = -1$,
$2a^2 - 6a = -a^2$;
$3a^2 - 6a = 0$;
$3a(a-2) = 0$;
удовлетворяет только $a = 2$

<u>Ответ</u>: при $a = 2$ и $a = 6$ система уравнений имеет 2 решения

4 СПОСОБ: <u>идея чётности</u>

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

Если (x; y), то (y; x) тоже рещение системы более того (-x; -y) тоже решение. Получаем четыре решения, что нас не устраивает, так как надо 2 решения. Это может быть, когда какие-то решения будут совпадать.

1) пусть (x;y) и (y; x) совпали. Это означает, что x = y

$$\begin{cases} x^2 + x^2 = a^2, \\ xx = a^2 - 3a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ x^2 = a^2 - 3a; * (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ -2x^2 = -2a^2 + 6a; \text{ сложим} \end{cases}$$

$-a^2 + 6a = 0$;
$a(a-6) = 0$;
$a = 0$ или $a = 6$

При $a = 0$, x = 0, y = 0, не 2 решения, проверим, существуют ли решения при $a = 6$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6^2, \\ xy = 6^2 - 3 * 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ xy = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{18}{x}\right)^2 = 36 \\ y = \frac{18}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{18} \\ y = \pm\sqrt{18} \end{cases}$$

Значит, при $a = 6$ имеем 2 решения.

2) пусть (x;y) и (-y; -x) совпали. Это означает, что x = -y

$$\begin{cases} x^2 + x^2 = a^2, \\ -xx = a^2 - 3a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ -x^2 = a^2 - 3a; * (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ 2x^2 = -2a^2 + 6a; \end{cases}$$

$-2a^2 + 6a = a^2$,
$3a^2 - 6a = 0$,
$3a(a-2) = 0$;
$a = 0$ или $a = 2$

Помним, что $a \neq 0$, проверим, существуют ли решения при $a = 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2, \\ xy = 2^2 - 3 * 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 4 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Значит, при $a = 2$ имеем 2 решения.

Ответ: при $a = 2$ и $a = 6$ система уравнений имеет 2 решения

5 СПОСОБ: графический

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

Система уравнений должна иметь 2 решения, значит окружность (1) и гипербола (2) могут иметь 2 точки пересечения при условии касания гиперболой окружности.