



Подготовка к ОГЭ – 2024 по математике

Задания №20:

- 1) Алгебраические выражения.
- 2) Уравнения.
- 3) Неравенства.

Алгебраические выражения

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 1. ФИПИ

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Пример 2. Найдите значение выражения при данном условии:

$28a - 7b + 13$, если $\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$.

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$$

$$2a - 5b + 8 = 6(5a - 2b + 8)$$

$$2a - 5b + 8 = 30a - 12b + 48$$

$$2a - 5b + 8 - 30a + 12b - 48 = 0$$

$$-28a + 7b - 40 = 0$$

$$-28a + 7b = 40$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27$$

Ответ: -27

Пример 3. Решите уравнение: $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$.

$$x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) = 0$$

$$x^2(x + 5) - 16(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x + 5)(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad x - 4 = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x = -5 \quad x = 4 \quad x = -4$$

Ответ: $-5; -4; 4$

Уравнения

Пример 4. Решите уравнение: $x^3 + 8x^2 = x + 8$.

$$x^3 + 8x^2 = x + 8$$

$$x^2(x+8) = (x+8)$$

$$x^2(x+8) - (x+8) = 0$$

$$(x+8)(x^2-1) = 0$$

$$(x+8)(x-1)(x+1) = 0$$

$$x+8=0 \text{ или } x-1=0 \text{ или } x+1=0$$

$$x=-8 \quad x=1 \quad x=-1$$

Ответ: -8; -1; 1.

Пример 5.1. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \text{ при условии } 7-x \geq 0, \text{ т.е. } x \leq 7$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{посторонний корень, так как } x \leq 7$$

Ответ: -6.

Пример 5.2. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$\text{ОДЗ: } 7-x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

Ответ: -6.

Пример 5.3. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет условию } 7-x \geq 0$$

Ответ: -6.

Уравнения

Пример 4. Решите уравнение: $x^3 + 8x^2 = x + 8$.

$$x^3 + 8x^2 = x + 8$$

$$x^2(x+8) = (x+8)$$

$$x^2(x+8) - (x+8) = 0$$

$$(x+8)(x^2-1) = 0$$

$$(x+8)(x-1)(x+1) = 0$$

$$x+8=0 \text{ или } x-1=0 \text{ или } x+1=0$$

$$x=-8 \quad x=1 \quad x=-1$$

Ответ: -8; -1; 1.

Пример 5.1. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \text{ при условии } 7-x \geq 0, \text{ т.е. } x \leq 7$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{посторонний корень, так как } x \leq 7$$

Ответ: -6.

Пример 5.2. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$\text{ОДЗ: } 7-x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

Ответ: -6.

Пример 5.3. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет условию } 7-x \geq 0$$

Ответ: -6.

Уравнения

Пример 6. Решите уравнение: $x(x^2+10x+25)=14(x+5)$.

$$x(x^2+10x+25)=14(x+5)$$

$$x(x+5)^2=14(x+5)$$

$$x(x+5)^2-14(x+5)=0$$

$$(x+5)(x(x+5)-14)=0$$

$$(x+5)(x^2+5x-14)=0$$

$$x+5=0 \quad \text{или} \quad x^2+5x-14=0$$

$$x=-5 \quad D=5^2-4 \cdot 1 \cdot (-14)=25+56=81$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5-9}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5+9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: -7; -5; 2.

Пример 7. Решите уравнение: $(x-3)(x^2+14x+49)=11(x+7)$.

$$(x-3)(x^2+14x+49)=11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2=11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2-11(x+7)=0$$

$$(x+7)((x-3)(x+7)-11)=0$$

$$(x+7)(x^2+7x-3x-21-11)=0$$

$$(x+7)(x^2+4x-32)=0$$

$$x+7=0 \quad \text{или} \quad x^2+4x-32=0$$

$$x=-7 \quad D=4^2-4 \cdot 1 \cdot (-32)=16+128=144$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4-12}{2} = -8 \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4+12}{2} = 4$$

Ответ: -8; -7; 4.

Уравнения

Пример 8. Решите уравнение: $(x^2-16)^2+(x^2+3x-28)^2=0$.

$$(x^2-16)^2+(x^2+3x-28)^2=0$$

$$(x^2-16)^2 \geq 0 \quad (x^2+3x-28)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2-16=0 \\ x^2+3x-28=0 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x^2-16=0 \\ -x^2-3x+28=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x^2-16=0 \\ -x^2-3x+28=0 \end{cases}$$

$$x^2-16-x^2-3x+28=0$$

$$-3x+12=0$$

$$-3x=-12$$

$$x=\frac{-12}{-3}=4$$

Ответ: 4

Уравнения

Пример 9.1. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

ОДЗ: $x \neq 0$

1) пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + 6t - 40 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196$$

$$t_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 14}{2} = -10$$

$$t_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 14}{2} = 4$$

2) вернемся к переменной x :

$$\frac{1}{x} = -10 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = 4$$

$$\frac{1}{x} = -10 \mid \cdot x \quad \frac{1}{x} = 4 \mid \cdot x$$

$$1 = -10x \quad 1 = 4x$$

$$x = -\frac{1}{10} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{10}; \frac{1}{4}.$$

Пример 9.2. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

ОДЗ: $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0 \mid \cdot x^2$$

$$1 + 6x - 40x^2 = 0$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{10}; \frac{1}{4}.$$

Пример 9.3. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

$$\frac{1 + 6x - 40x^2}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 6x - 40x^2 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{10} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{10}; \frac{1}{4}.$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

Уравнения

Пример 10.1. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

1) пусть $x-3=t$, тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0$$

ОДЗ: $t \neq 0$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0 \mid \cdot t^2$$

$$1 - 7t - 18t^2 = 0$$

$$-18t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-18) \cdot 1 = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 - 11}{-36} = \frac{1}{9} \quad t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 + 11}{-36} = -\frac{1}{2}$$

2) вернемся к переменной x :

$$x - 3 = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad x - 3 = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{9} + 3 \quad x = -\frac{1}{2} + 3$$

$$x = 3\frac{1}{9} \quad x = 2\frac{1}{2}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$.

Пример 10.2. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

ОДЗ: $x-3 \neq 0$, т.е. $x \neq 3$

1) пусть $\frac{1}{x-3} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2 \quad t_2 = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

2) вернемся к переменной x :

$$\frac{1}{x-3} = -2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x-3} = 9$$

$$\frac{1}{x-3} = -2 \mid \cdot (x-3) \quad \frac{1}{x-3} = 9 \mid \cdot (x-3)$$

$$1 = -2(x-3)$$

$$1 = 9(x-3)$$

$$1 = -2x + 6$$

$$1 = 9x - 27$$

$$2x = 6 - 1$$

$$-9x = -27 - 1$$

$$2x = 5$$

$$-9x = -28$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$.

Уравнения

Пример 11.1. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной x :

$$(x+5)^2 = -4$$

действительных корней нет

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5-\sqrt{3})(x+5+\sqrt{3}) = 0$$

$$x+5-\sqrt{3} = 0 \quad x+5+\sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3} \quad x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}$; $-5 + \sqrt{3}$.

Пример 11.2. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$ ($t \geq 0$), тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \text{ — не удовлетворяет условию } t \geq 0$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной x :

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5-\sqrt{3})(x+5+\sqrt{3}) = 0$$

$$x+5-\sqrt{3} = 0 \quad \text{или} \quad x+5+\sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3} \quad x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}$; $-5 + \sqrt{3}$.

Неравенства

Пример 16. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$.

$$\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$$

т.к. $-21 < 0$ и $(x+6)^2-10 \neq 0$, то равносильным к данному будет неравенство $(x+6)^2-10 < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x+6)^2-10$.

Нули функции:

$$(x+6)^2-10=0$$

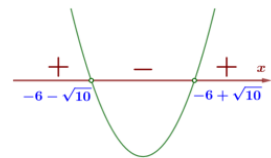
$$(x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10})=0$$

$$x+6-\sqrt{10}=0 \quad \text{или} \quad x+6+\sqrt{10}=0$$

$$x_1 = -6+\sqrt{10} \quad x_2 = -6-\sqrt{10}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x+6)^2-10$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$f(x) < 0$ при $x \in (-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$

Ответ: $(-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$.

Пример 17. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$.

Нули функции:

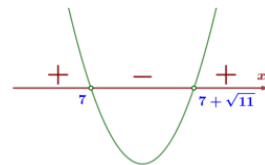
$$(x-7)(x-7-\sqrt{11})=0$$

$$x-7=0 \quad \text{или} \quad x-7-\sqrt{11}=0$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 7+\sqrt{11}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$f(x) < 0$ при $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.